

[東京工業大学 2002 年後期 2]



xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。

C を底面, $(0, 0, \sqrt{3})$ を頂点とする直円錐 S を考える。点 $P(1, 0, 0)$ および $Q(-2, 0, 0)$ をとる。

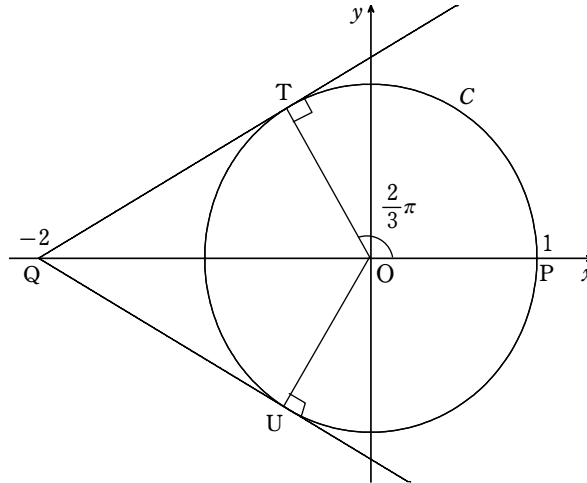
さらに, 動点 $M(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を線分 MQ が M 以外に C と交わらないように動かす。

(1) θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 P から動点 M までは直円錐 S の側面上を通り, M からは直線にそって点 Q へ向かう道を考える。このような P から Q までの全ての道の長さの最小値を求めよ。



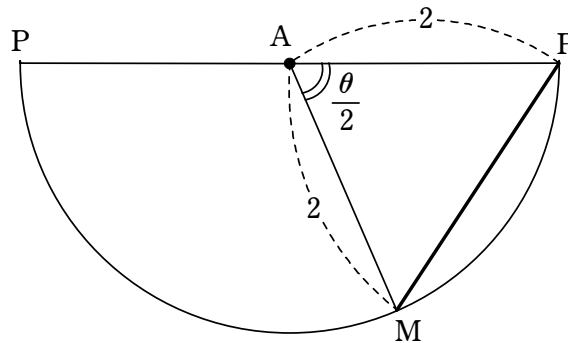
(1) 動点 M は, 図の弧 TU の範囲にあればよい。



よって, θ のとりうる値の範囲は $\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$

(2) 対称性より $\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \pi$ で考える。

母線 AP の長さは 2 であり, 側面の展開図は図のようになるので



題意の道の長さを L とすると $L = PM + MQ$ である。

ここで、余弦定理より $PM = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cos \angle PAM} = \sqrt{8 - 8 \cos \frac{\theta}{2}}$

2点間の距離より $MQ = \sqrt{(\cos \theta + 2)^2 + \sin^2 \theta}$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{8 - 8 \cos \frac{\theta}{2}} + \sqrt{(\cos \theta + 2)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}} + \sqrt{5 + 4 \cos \theta} \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}} + \sqrt{5 + 4 \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)} \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}} + \sqrt{8 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1} \end{aligned}$$

となるが、 $t = \cos \frac{\theta}{2}$ とおくと、 $\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \pi$ のとき $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ であり、

$L = 2\sqrt{2} \sqrt{1-t} + \sqrt{8t^2+1}$ となる。これを $f(t)$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) + \frac{1}{2} (8t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16t \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t}} + \frac{8t}{\sqrt{8t^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{2} (4\sqrt{2}t\sqrt{1-t} - \sqrt{8t^2+1})}{\sqrt{1-t}\sqrt{8t^2+1}} \end{aligned}$$

ここで、右辺の分子が0以上、すなわち $4\sqrt{2}t\sqrt{1-t} \geq \sqrt{8t^2+1}$ となる t の範囲を求める。

$32t^2(1-t) \geq 8t^2+1 \Leftrightarrow (4t-1)(8t^2-4t-1) \leq 0$ であり、

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ においては $8t^2-4t-1 < 0$ であるから

$0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ では $f'(t) \leq 0$ となり $f(t)$ は減少し、

$\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ では $f'(t) \geq 0$ となり $f(t)$ は増加する。

よって L の最小値は $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2}+1} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ である。