[東京工業大学 2002 年後期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

n を自然数とする。

(1) 実数 x に対して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}-\frac{1}{1+x^2}$ を求めよ。

(2) 不等式 $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right|\leqq\frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}-\frac{1}{1+x^2}&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(x^2\right)^k-\frac{1}{1+x^2}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k-\frac{1}{1+x^2}\\
&=\frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1-\left(-x^2\right)}-\frac{1}{1+x^2}\\
&=\frac{-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2}\\
&=\frac{(-1)^{n+2}x^{2(n+1)}}{1+x^2}\\
&=\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\quad\cdots①
\end{aligned}
$$

(2) ①の両辺を 0 から 1 まで x で積分すると

$$\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}-\frac{1}{1+x^2}\right\}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\quad\cdots②$$

②の両辺の絶対値をとると

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|=\left|(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right|\quad\cdots③$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leqq x^{2n+2}$ なので

$\left| \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| \leqq \displaystyle\int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}$ …④ であるから

③，④より $\left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| \leqq \dfrac{1}{2n+3}$ が成り立つ。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ であるから

(2)の結果より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ である。

ここで，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ において $x = \tan\theta$ と置換すると

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

よって $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$