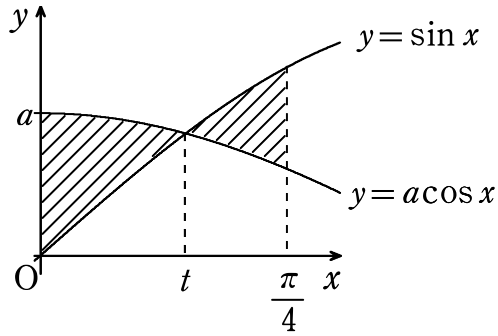
［ 東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{1}$ ］

実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x - a\cos x\right|dx$$

を考える。 $f(a)$ の最小値を求めよ。

$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x - a\cos x\right|dx$ は，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の間で挟まれる部分の面積なので， $f(a)$ が最小値をとる a は正である。



また，グラフの上下関係を考えると，$f(a)$ が最小となるのは，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ のグラフが $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で交わるときであり，その交点の x 座標を t とおく。…①

このとき， $f(a)=\int_0^t -(\sin x - a\cos x)\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{4}}(\sin x - a\cos x)\,dx$

$$=\left[\cos x + a\sin x\right]_0^t+\left[-\cos x - a\sin x\right]_t^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\cos t + a\sin t - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} + \cos t + a\sin t$$

$$=2\cos t + 2a\sin t - \frac{a}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで， $g(a)=2\cos t + 2a\sin t - \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ とおく。

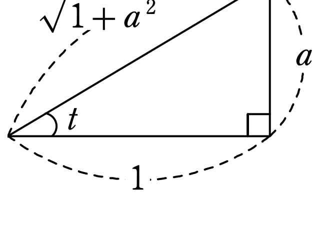
①より $\sin t = a\cos t$ …②

$\cos t = \dfrac{\sin t}{a}$ より

$$g(a)=2\cdot\frac{\sin t}{a}+2a\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

②より $a=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\tan t$ なので



から $\sin t=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

したがって

$$g(a)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}=2\sqrt{1+a^2}-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$g'(a)=2\cdot\frac{1}{2}(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2a-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}a-\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

ここで，$2\sqrt{2}a-\sqrt{1+a^2}=0$ となるのは $2\sqrt{2}a=\sqrt{1+a^2}$

$$8a^2=1+a^2$$

$$7a^2=1$$

$a>0$ より $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ のとき

$g(a)$ の増減は下表に従う。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		↘	最小	↗

よって $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ のときに $g(a)$ が最小となることがわかり，

$f(a)$ の最小値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=g\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)-1-\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{1+\frac{1}{7}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{14}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{8\sqrt{14}-\sqrt{14}-14-7\sqrt{2}}{14}=\frac{7\sqrt{14}-14-7\sqrt{2}}{14}=\frac{\sqrt{14}-2-\sqrt{2}}{2}$$

〔参考〕

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ においては $\cos x>0$ なので，

$f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\left|\tan x-a\right|dx$ として

$y=\tan x,\ y=a$ の大小で場合分けをした方が考えやすいかもしれない。

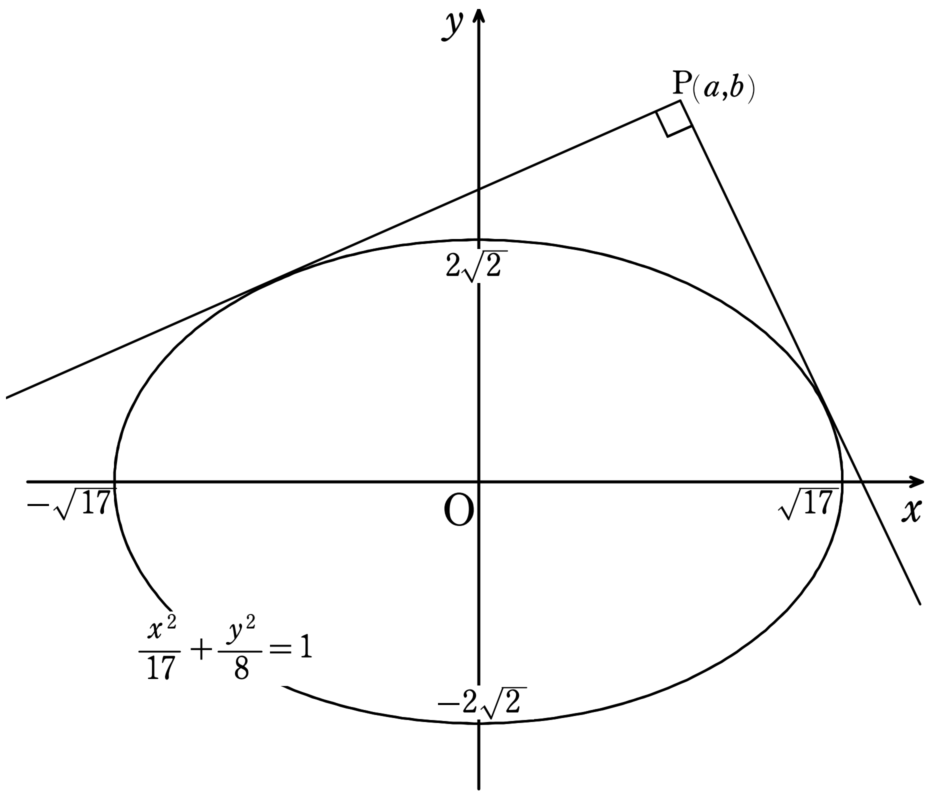
[東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ からひいた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

☆ ☆

2 本の接線が x 軸，y 軸と平行になるのは $(a,\ b)=\left(\pm\sqrt{17},\ \pm 2\sqrt{2}\right)$ （複号任意）のときである。



2 本の接線が x 軸，y 軸に平行でないとき，2 本の接線を $y=m(x-a)+b$ $\left(a\neq\pm\sqrt{17}\right)$ とおく。

このとき，楕円の方程式と連立させると $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{\{m(x-a)+b\}^2}{8}=1$

$$\Leftrightarrow\ 8x^2+17\{m(x-a)+b\}^2=17\cdot 8$$

$$\Leftrightarrow\ (8+17m^2)x^2-34m(ma-b)x+17\{(ma-b)^2-8\}^2=0\cdots①$$

となるが，①の判別式を D とすると，接線である条件から

$$\frac{D}{4}=17^2m^2(ma-b)^2-(8+17m^2)\cdot 17\{(ma-b)^2-8\}^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ 17m^2(ma-b)^2-(8+17m^2)(ma-b)^2+8(8+17m^2)=0$$

$\Leftrightarrow\ -8(ma-b)^2+8(8+17m^2)=0$

$\Leftrightarrow\ -(ma-b)^2+(8+17m^2)=0$

$\Leftrightarrow\ (17-a^2)m^2+2abm+8-b^2=0\ \cdots$②

$a\neq\pm\sqrt{17}$ であり，②の 2 解が 2 本の接線の傾きである。

2 解を $m_1,\ m_2$ とおくと 2 接線が直交することから

$$m_1m_2=-1\ \Leftrightarrow\ \frac{8-b^2}{17-a^2}=-1$$

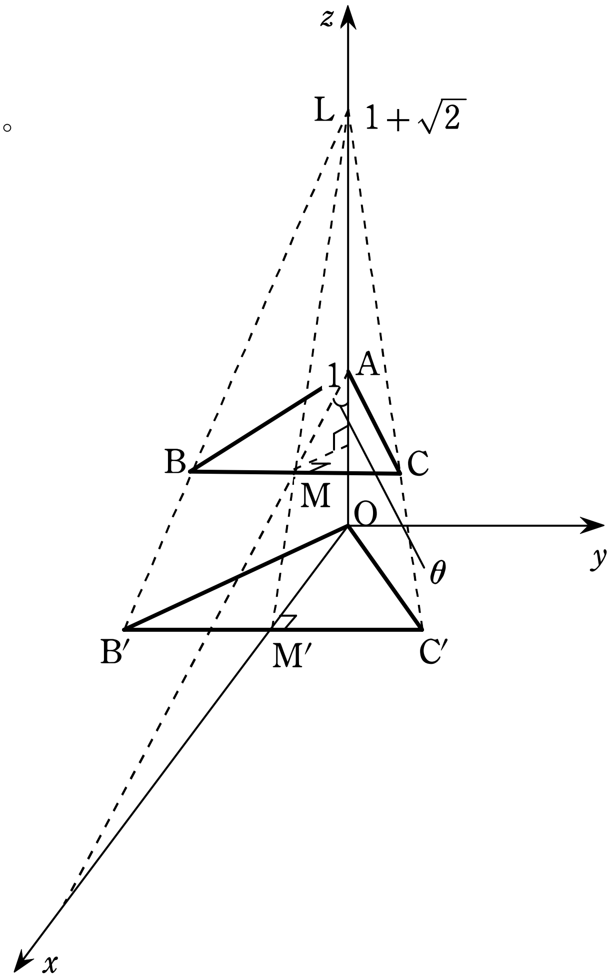
$$\Leftrightarrow\ a^2+b^2=25\ \cdots③$$

$(a,\ b)=\left(\pm\sqrt{17},\ \pm2\sqrt{2}\right)$ のとき③は満たされているので，求める点 P の軌跡は

原点中心，半径 5 の円

［ 東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{3}$ ］

空間内にある一辺の長さが 1 の正三角形 ABC で，A の座標が (0, 0, 1) であり，B と C の z 座標が等しいものを考える。点 L $(0, 0, 1+\sqrt{2})$ にある光源が xy 平面上に作るこの正三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。



正三角形 ABC の辺 BC の中点を M とする。

BC ⊥ AM であり，直線 LA は xy 平面と原点 O で交わる。

また，直線 LB, LC, LM が xy 平面と交わる点をそれぞれ B´, C´, M´ とする。

このとき光源 L が xy 平面上につくる正三角形 ABC の影は△OB´C´ である。

M が zx 平面の $x \geqq 0$ の部分にあり，C の y 座標は正であるとしても一般性を失わない。

このとき M´ は x 軸上の $x \geqq 0$ の部分にあり，B´C´ ⊥ OM´ である。

$\angle\mathrm{OAM} = \theta\ \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，

$\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

M の座標は $\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ 0,\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

さらに，$\mathrm{MC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} = \dfrac{1}{2}$ であり，B と C の z 座標は等しく，C の y 座標は正であるから，

C の座標は $\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ \dfrac{1}{2},\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} + k\overrightarrow{\mathrm{LC}}$ （k は実数）とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} + k\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}}\right)$

$$=\left(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2}\right)+k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\sqrt{2}\right)$$

C′ は xy 平面上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ の z 成分は 0 であるから

$$\left(1+\sqrt{2}\right)-k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sqrt{2}\right)=0$$

よって $k=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sqrt{2}}=\dfrac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}}$

したがってC′ の座標は $\mathrm{C'}\left(\dfrac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}}\sin\theta,\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}},\ 0\right)$

正三角形ABC の影の部分である△OB′C′ の面積を $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\mathrm{B'C'}\times\mathrm{OM'}=\mathrm{M'C'}\times\mathrm{OM'}$$

＝（C′ の y 座標）×（C′ の x 座標）

$$=\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^2}\sin\theta$$ となる。

$$f'(\theta)=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\cos\theta\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{3}\sin^2\theta\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^4}$$

$$=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\cos\theta\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)+2\sqrt{3}\sin^2\theta}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^3}$$

$$=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{-\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^3}$$

$$=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{-\left(\cos\theta-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^3}$$

$-\left(\cos\theta-\sqrt{6}\right)>0,\ \sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{2}>0$ であるから

$f'(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ のときで，このときの θ を α とおくと，

$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ のときに最大となり，$f(\theta)$ の増減は次の表に従う。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ここで，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

求める最大値は $f(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

[東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{4}$]

n を自然数とする。

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

(2) 関数 $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots\frac{1}{n-x_n}$$

および $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ を示せ。

(3) (2)の x_n に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n\log n$ を求めよ。

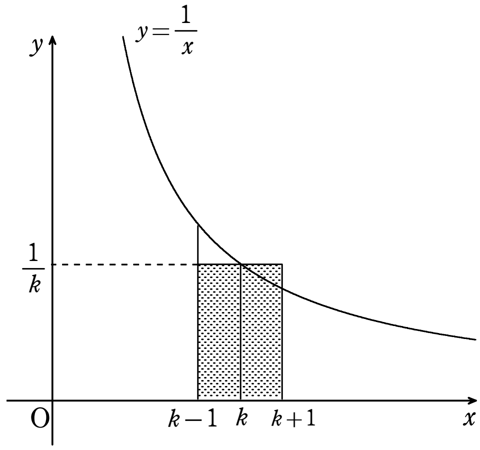
---

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ は $x>0$ において単調減少関数であるから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$$

$k=1, 2, 3, \cdots, n$ として辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ \Leftrightarrow\ \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\quad\cdots①$$



同様に $\dfrac{1}{k}<\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$

$k=2, 3, \cdots, n$ として辺々加えると

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^{n}\frac{1}{x}dx\quad\cdots②$$

ここで，$\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\log(n+1)$，$\displaystyle\int_1^{n}\frac{1}{x}dx=\log n$ であるから

①，②より $\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\log n$

$n\to\infty$ のときを考えるので $\log n>0$ であり，これで辺々を割ると

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}<\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1+\log n}{\log n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}$$

$$=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}+1\right)$$

$$=1$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$$

(2)　$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$　…③

$f'(x)=\{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\}+\{x(x-2)\cdots(x-n)\}+\cdots+\{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\}$　…④

(ⅰ)　$x=0$ のとき，④より　$f'(0)=(-1)(-2)\cdots(-n)$

このことから　n が偶数のとき　$f'(0)>0$，n が奇数のとき　$f'(0)<0$

よって　$f'(0)\neq 0$

(ⅱ)　$x<0$ のとき，③の右辺の各項はすべて負の数の積になっているから

n が偶数のとき　$f'(x)>0$，n が奇数のとき　$f'(x)<0$

よって　$x<0$ のとき　$f'(x)\neq 0$

したがって，(ⅰ)(ⅱ)より $f(x)$ は　$x\leqq 0$　で極値をもたない。

(ⅲ)　③より　$f(0)=f(1)=0$　であり，$0<x<1$　で $f(x)$ の符号に変化のないこと，$f(x)$ が微分可能な連続関数であることから，$f(x)$ は $0<x<1$ で少なくとも 1 つの極値をもつことがわかる。

そのときの x を x_n とする $\left(f'(x_n)=0,\ f(x_n)\neq 0\right)$。

このとき③，④より

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n-2}+\cdots+\frac{1}{x_n-n}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$$

また，$0<x_n<1$ であるから

$n=1$ のとき $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{1-x_1}$ より $x_1=\dfrac{1}{2}$

$n\geqq 2$ のとき $\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}>\dfrac{1}{1-x_n}>0$ より

$$\frac{1}{x_n}>\frac{1}{1-x_n}\ \Leftrightarrow\ 1-x_n>x_n\ \Leftrightarrow\ x_n<\frac{1}{2}$$

よって $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$

(3) (2)より $\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}$，$0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{1}{x_n}\leqq\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2-\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}$$

$n\to\infty$ のときを考えるので $\log n>0$ であり，これで辺々を割ると

$$\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{x_n\log n}\leqq\frac{1}{\log n}\left(2+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{2n-1}\right)$$

ここで，$\dfrac{1}{\log n}\left(2+\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{2}{2n-1}\right)=\dfrac{1}{\log n}\left\{2+\left(\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{2}{2n-1}\right)\right\}$

$$\leqq\frac{1}{\log n}\left\{2+\left(\frac{2}{2}+\cdots+\frac{2}{2n-2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\log n}\left\{2+\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\right\}$$

$$\leqq\frac{1}{\log n}\left\{2+\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{\log n}+\frac{1}{\log n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$$

である。

さらに，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{\log n}+\frac{1}{\log n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\right\}=1$

より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n\log n}=1$

したがって $\lim_{n\to\infty}x_n\log n=1$

[注] (1)の別解を示す。こちらの方が簡潔に示せている。

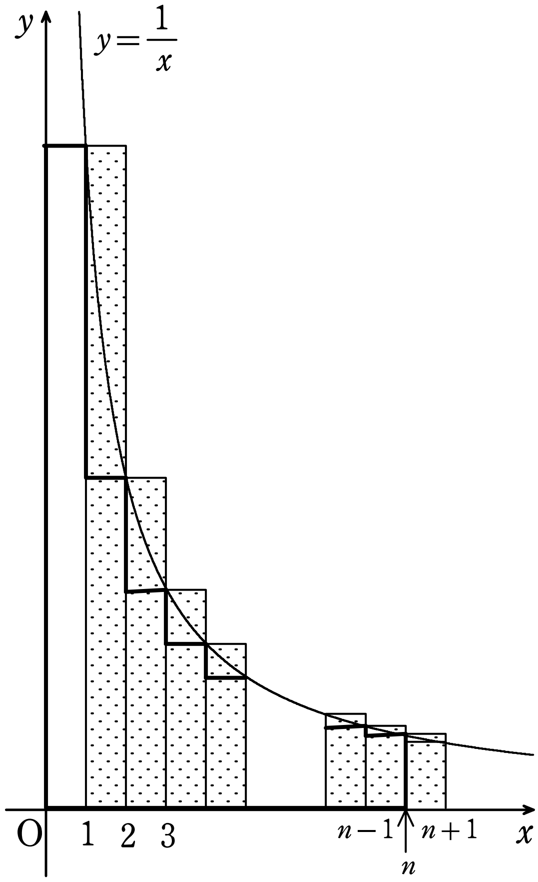
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ を

図の太線で囲んだ部分と考えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx \quad \cdots（A）$$

打点部分の面積と考えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^n\frac{1}{x}dx \quad \cdots（B）$$



（A），（B）より

$$\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \quad \text{から}$$

$$1<\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{\log n}+1$$

となり，より簡単に結論が導ける。