［ 東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{4}$ ］

n を自然数とする。

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

(2) 関数 $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき

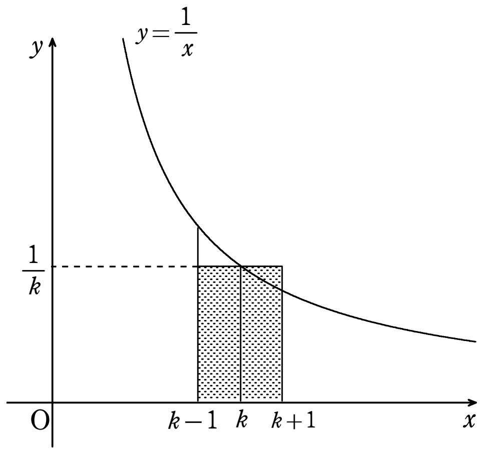
$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots\frac{1}{n-x_n}$$

および $0<x_n\leqq\frac{1}{2}$ を示せ。

(3) (2)の x_n に対して，極限 $\lim_{n\to\infty}x_n\log n$ を求めよ。

---

(1) $y=\frac{1}{x}$ は $x>0$ において単調減少関数であるから



$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$$

$k=1, 2, 3, \cdots, n$ として辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \iff \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \cdots①$$

同様に $\frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$

$k=2, 3, \cdots, n$ として辺々加えると

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx \iff \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^{n}\frac{1}{x}dx \quad \cdots②$$

ここで，$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\log(n+1)$，$\int_1^{n}\frac{1}{x}dx=\log n$ であるから

①，②より $\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$

$n\to\infty$ のときを考えるので $\log n>0$ であり，これで辺々を割ると

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}<\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1+\log n}{\log n}$$

ここで，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}$$

$$=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}+1\right)$$

$$=1$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$$

(2)　$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$　…③

$f'(x)=\{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\}+\{x(x-2)\cdots(x-n)\}+\cdots+\{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\}$　…④

(ｉ)　$x=0$ のとき，④より　$f'(0)=(-1)(-2)\cdots(-n)$

　このことから　n が偶数のとき　$f'(0)>0$，n が奇数のとき　$f'(0)<0$

　よって　$f'(0)\neq 0$

(ⅱ)　$x<0$ のとき，③の右辺の各項はすべて負の数の積になっているから

　n が偶数のとき　$f'(x)>0$，n が奇数のとき　$f'(x)<0$

　よって　$x<0$ のとき　$f'(x)\neq 0$

したがって，(ｉ)(ⅱ)より $f(x)$ は　$x\leqq 0$　で極値をもたない。

(iii)　③より　$f(0)=f(1)=0$　であり，$0<x<1$　で $f(x)$ の符号に変化のないこと，$f(x)$ が微分可能な連続関数であることから，$f(x)$ は $0<x<1$ で少なくとも 1 つの極値をもつことがわかる。

そのときの x を x_n とする $\left(f'(x_n)=0,\ f(x_n)\neq 0\right)$。

このとき③，④より

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n-2}+\cdots+\frac{1}{x_n-n}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$$

また，$0<x_n<1$ であるから

$n=1$ のとき $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{1-x_1}$ より $x_1=\dfrac{1}{2}$

$n\geqq 2$ のとき $\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}>\dfrac{1}{1-x_n}>0$ より

$$\frac{1}{x_n}>\frac{1}{1-x_n}\ \Leftrightarrow\ 1-x_n>x_n\ \Leftrightarrow\ x_n<\frac{1}{2}$$

よって $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$

(3) (2)より $\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}$， $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{1}{x_n}\leqq\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2-\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}$$

$n\to\infty$ のときを考えるので $\log n>0$ であり，これで辺々を割ると

$$\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{x_n\log n}\leqq\frac{1}{\log n}\left(2+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{2n-1}\right)$$

ここで，$\dfrac{1}{\log n}\left(2+\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{2}{2n-1}\right)=\dfrac{1}{\log n}\left\{2+\left(\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{2}{2n-1}\right)\right\}$

$$\leqq\frac{1}{\log n}\left\{2+\left(\frac{2}{2}+\cdots+\frac{2}{2n-2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\log n}\left\{2+\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\right\}$$

$$\leqq\frac{1}{\log n}\left\{2+\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{\log n}+\frac{1}{\log n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$$

である。

さらに，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{\log n}+\frac{1}{\log n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\right\}=1$

より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n\log n}=1$

したがって $\lim_{n\to\infty}x_n\log n=1$

[注] (1)の別解を示す。こちらの方が簡潔に示せている。

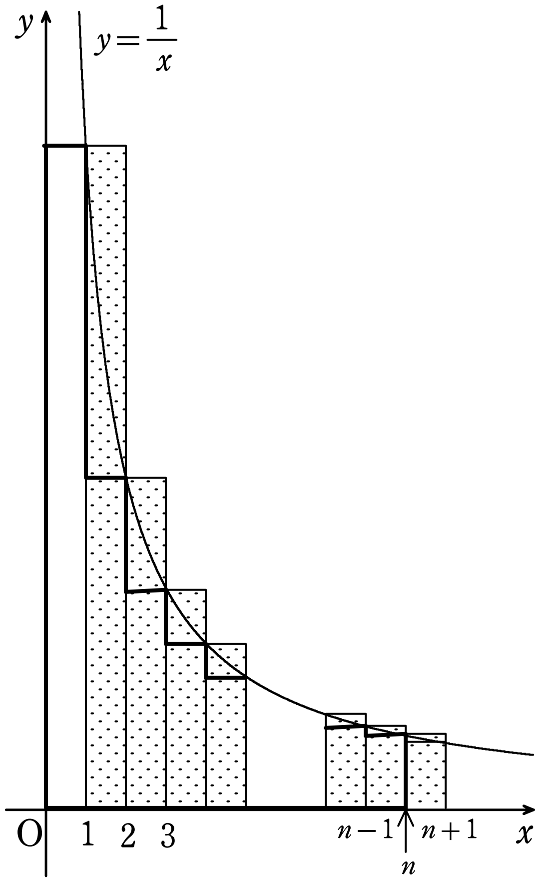
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ を

図の太線で囲んだ部分と考えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx \quad \cdots\text{（A）}$$

打点部分の面積と考えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^n\frac{1}{x}dx \quad \cdots\text{（B）}$$



（A），（B）より

$$\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \text{ から}$$

$$1<\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{\log n}+1$$

となり，より簡単に結論が導ける。