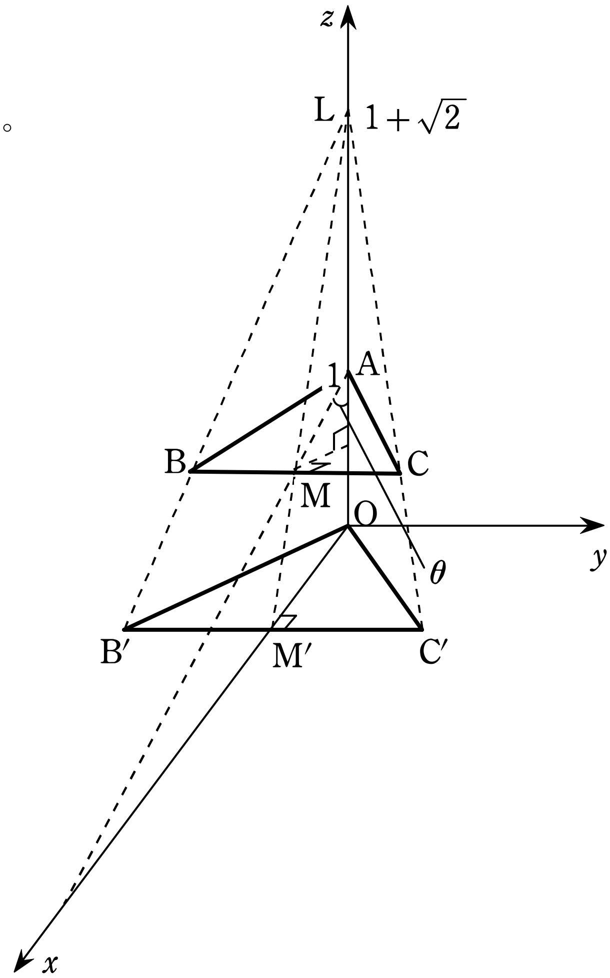
[東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{3}$]

☆ ──────────────────────────── ☆

空間内にある一辺の長さが 1 の正三角形 ABC で，A の座標が $(0,\ 0,\ 1)$ であり，B と C の z 座標が等しいものを考える。点 $\mathrm{L}\,(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$ にある光源が xy 平面上に作るこの正三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。

☆ ──────────────────────────── ☆



正三角形 ABC の辺 BC の中点を M とする。

$\mathrm{BC}\perp\mathrm{AM}$ であり，直線 LA は xy 平面と原点 O で交わる。

また，直線 LB, LC, LM が xy 平面と交わる点をそれぞれ B´, C´, M´ とする。

このとき光源 L が xy 平面上につくる正三角形 ABC の影は△OB´C´ である。

M が zx 平面の $x\geqq 0$ の部分にあり，C の y 座標は正であるとしても一般性を失わない。

このとき M´ は x 軸上の $x\geqq 0$ の部分にあり，

$\mathrm{B'C'}\perp\mathrm{OM'}$ である。

$\angle\mathrm{OAM}=\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

M の座標は $\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ 0,\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

さらに，$\mathrm{MC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ であり，B と C の z 座標は等しく，C の y 座標は正であるから，

C の座標は $\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ \dfrac{1}{2},\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+k\overrightarrow{\mathrm{LC}}$ （k は実数）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right)$$

$$=\left(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2}\right)+k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\sqrt{2}\right)$$

C′ は xy 平面上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ の z 成分は 0 であるから

$$\left(1+\sqrt{2}\right)-k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sqrt{2}\right)=0$$

よって $k=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sqrt{2}}=\dfrac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}}$

したがってC′ の座標は $\mathrm{C'}\left(\dfrac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}}\sin\theta,\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}},\ 0\right)$

正三角形ABC の影の部分である△OB′C′ の面積を $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\mathrm{B'C'}\times\mathrm{OM'}=\mathrm{M'C'}\times\mathrm{OM'}$$

＝（C′ の y 座標）×（C′ の x 座標）

$$=\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^2}\sin\theta$$ となる。

$$f'(\theta)=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\cos\theta\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{3}\sin^2\theta\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^4}$$

$$=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\cos\theta\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)+2\sqrt{3}\sin^2\theta}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^3}$$

$$=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{-\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^3}$$

$$=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{-\left(\cos\theta-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{2}\right)^3}$$

$-\left(\cos\theta-\sqrt{6}\right)>0,\ \sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{2}>0$ であるから

$f'(\theta)=0$ となるのは $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ のときで，このときの θ を α とおくと，

$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ のときに最大となり，$f(\theta)$ の増減は次の表に従う。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ここで，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ であるから

求める最大値は $$f(\alpha) = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$