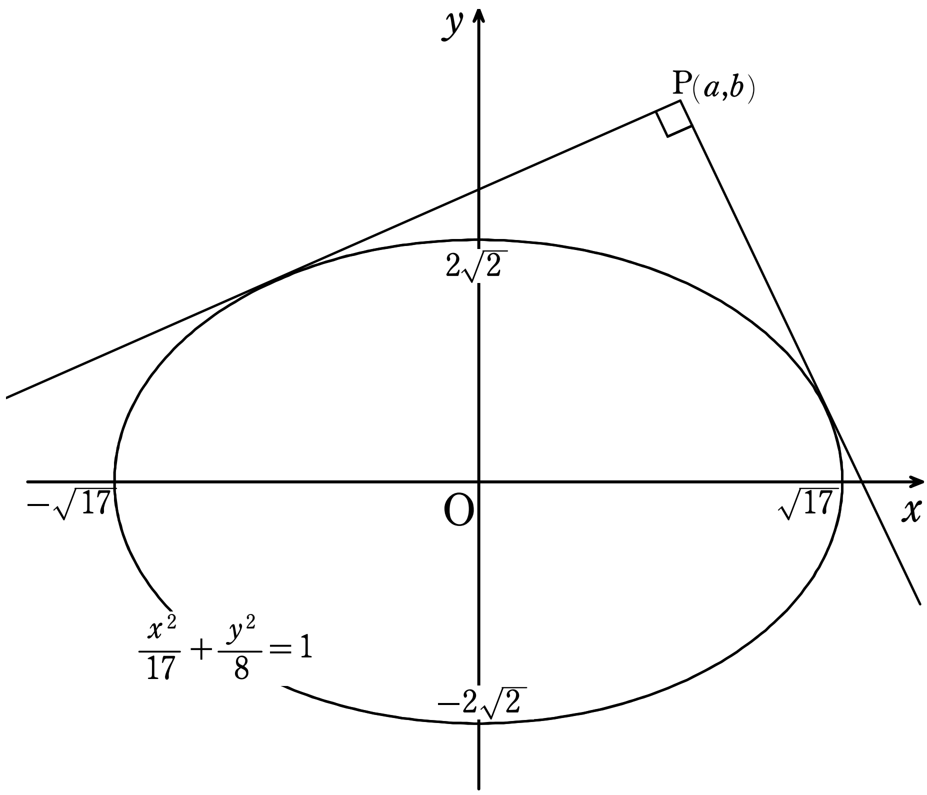
[東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ からひいた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

☆ ☆

2 本の接線が x 軸，y 軸と平行になるのは $(a,\ b)=\left(\pm\sqrt{17},\ \pm2\sqrt{2}\right)$ （複号任意）のときである。



2 本の接線が x 軸，y 軸に平行でないとき，2 本の接線を $y=m(x-a)+b\ \left(a\neq\pm\sqrt{17}\right)$ とおく。

このとき，楕円の方程式と連立させると $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{\{m(x-a)+b\}^2}{8}=1$

$$\Leftrightarrow\ 8x^2+17\{m(x-a)+b\}^2=17\cdot8$$

$$\Leftrightarrow\ (8+17m^2)x^2-34m(ma-b)x+17\left\{(ma-b)^2-8\right\}^2=0\cdots①$$

となるが，①の判別式を D とすると，接線である条件から

$$\frac{D}{4}=17^2m^2(ma-b)^2-(8+17m^2)\cdot17\left\{(ma-b)^2-8\right\}^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ 17m^2(ma-b)^2-(8+17m^2)(ma-b)^2+8(8+17m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \ -8(ma-b)^2+8(8+17m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \ -(ma-b)^2+(8+17m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \ (17-a^2)m^2+2abm+8-b^2=0 \quad \cdots②$$

$a \neq \pm\sqrt{17}$ であり，②の 2 解が 2 本の接線の傾きである。

2 解を m_1, m_2 とおくと 2 接線が直交することから

$$m_1 m_2 = -1 \ \Leftrightarrow \ \frac{8-b^2}{17-a^2}=-1$$

$$\Leftrightarrow \ a^2+b^2=25 \quad \cdots③$$

$(a,\ b)=\left(\pm\sqrt{17},\ \pm 2\sqrt{2}\right)$ のとき③は満たされているので，求める点 P の軌跡は

原点中心，半径 5 の円