[東京工業大学 2002 年 前期 $\boxed{1}$]

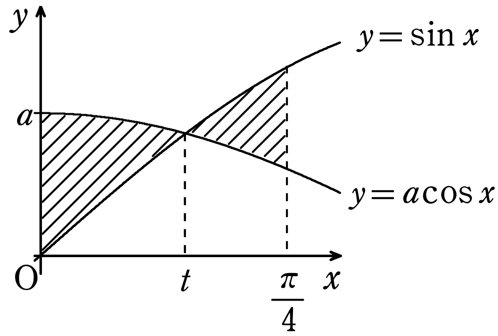
実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx$$

を考える。$f(a)$ の最小値を求めよ。

$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx$ は，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の間で挟まれる部分の面積なので，$f(a)$ が最小値をとる a は正である。

また，グラフの上下関係を考えると，$f(a)$ が最小となるのは，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ のグラフが $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で交わるときであり，その交点の x 座標を t とおく。…①



このとき，$f(a)=\int_0^t-(\sin x-a\cos x)\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-a\cos x)\,dx$

$$=\Big[\cos x+a\sin x\Big]_0^t+\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\cos t+a\sin t-1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}+\cos t+a\sin t$$

$$=2\cos t+2a\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで，$g(a)=2\cos t+2a\sin t-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ とおく。

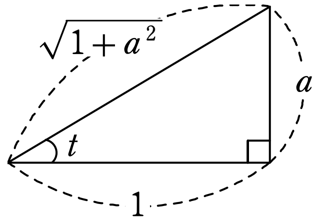
①より　$\sin t=a\cos t$　…②

$\cos t=\dfrac{\sin t}{a}$　より

$$g(a)=2\cdot\frac{\sin t}{a}+2a\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

②より　$a=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\tan t$　なので



から　$\sin t=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

したがって

$$g(a)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}=2\sqrt{1+a^2}-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$g'(a)=2\cdot\frac{1}{2}(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2a-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}a-\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

ここで，$2\sqrt{2}a-\sqrt{1+a^2}=0$ となるのは $2\sqrt{2}a=\sqrt{1+a^2}$

$$8a^2=1+a^2$$

$$7a^2=1$$

$a>0$ より $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ のとき

$g(a)$ の増減は下表に従う。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		↘	最小	↗

よって $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ のときに $g(a)$ が最小となることがわかり，

$f(a)$ の最小値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=g\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)-1-\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{1+\frac{1}{7}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{14}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{8\sqrt{14}-\sqrt{14}-14-7\sqrt{2}}{14}=\frac{7\sqrt{14}-14-7\sqrt{2}}{14}=\frac{\sqrt{14}-2-\sqrt{2}}{2}$$

〔参考〕

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ においては $\cos x>0$ なので，

$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\left|\tan x-a\right|dx$ として

$y=\tan x,\ y=a$ の大小で場合分けをした方が考えやすいかもしれない。