[東京工業大学 2001 年後期 $\boxed{1}$]

☆―――――☆

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $a_n=\tan(11n)$ とおく。このとき，次の(1)～(4)を示せ。ただし，

$\pi=3.14159265\cdots$ は円周率である。

(1) $\dfrac{\pi}{711}<11-\dfrac{7\pi}{2}<\dfrac{\pi}{709}$

(2) $a_1<0<a_2$

(3) $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \cdots,\ a_{707},\ a_{709}$ は増加数列である。

(4) 無限数列 $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \cdots$ は増加数列ではない。

☆―――――☆

(1) $\dfrac{\pi}{711}<11-\dfrac{7\pi}{2}<\dfrac{\pi}{709} \iff \dfrac{\pi}{711}+\dfrac{7\pi}{2}<11<\dfrac{\pi}{709}+\dfrac{7\pi}{2}$

$$\iff \frac{4979}{1422}\pi<11<\frac{4965}{1418}\pi$$

$$\iff \frac{15598}{4965}<\pi<\frac{15642}{4979}$$

である。

ここで，$\dfrac{15598}{4965}=3.1415911\cdots<3.14159265\cdots=\pi$

$\dfrac{15642}{4979}=3.1415946\cdots>3.14159265\cdots=\pi$

であるから，$\dfrac{\pi}{711}<11-\dfrac{7\pi}{2}<\dfrac{\pi}{709}$ が成り立つ。

(2) $a_1=\tan 11$，$a_2=\tan 22$ である。

ここで，(1)から $0<11-\dfrac{7\pi}{2}$ であり，$11<4\pi$ であるから $\dfrac{7\pi}{2}<11<4\pi$ である。

よって $-\dfrac{\pi}{2}<11-4\pi<0$ が成り立つ。

したがって，$\tan(11-4\pi)=\tan 11<0$ から $a_1<0$ となる。

また，(1)から $0<11-\dfrac{7\pi}{2}$ であり，$22<\dfrac{15}{2}\pi$ であるから $7\pi<22<\dfrac{15}{2}\pi$ である。

よって $0<22-7\pi<\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ。

したがって，$\tan(22-7\pi)=\tan 22>0$ から $0<a_2$ となる。よって $a_1<0<a_2$ である。

(3) (1)より $\dfrac{\pi}{711} < 11 - \dfrac{7\pi}{2} < \dfrac{\pi}{709} \Leftrightarrow \dfrac{7\pi}{2} + \dfrac{\pi}{711} < 11 < \dfrac{7\pi}{2} + \dfrac{\pi}{709}$

辺々に $2m-1>0$ をかけると

$$\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{711}\right)(2m-1) < 11(2m-1) < \left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{709}\right)(2m-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{2}(2m-1)+\frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1) < \frac{7\pi}{2}(2m-1)+\frac{(2m-1)\pi}{709}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7m\pi-\frac{7\pi}{2}+\frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1) < 7m\pi-\frac{7\pi}{2}+\frac{(2m-1)\pi}{709}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+7m\pi-3\pi+\frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1) < -\frac{\pi}{2}+7m\pi-3\pi+\frac{(2m-1)\pi}{709}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+\frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1)-(7m-3)\pi < -\frac{\pi}{2}+\frac{(2m-1)\pi}{709} \quad \cdots①$$

となる。

ここで，$\alpha_m = -\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{(2m-1)\pi}{711}$, $\beta_m = -\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{(2m-1)\pi}{709}$, $\theta_m = 11(2m-1)-(7m-3)\pi$ とおくと

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ 355$ に対し $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha_m < \theta_m < \beta_m \leqq \dfrac{\pi}{2}$ …② が成り立つ。

したがって $\tan\alpha_m < \tan\theta_m < \tan\beta_m$ である。

$\theta_m = 11(2m-1)-(7m-3)\pi$ なので

$a_{2m-1} = \tan\{11(2m-1)\} = \tan\theta_m$ であるから

$\tan\alpha_m < a_{2m-1} < \tan\beta_m$ が成り立つ。

さらに，$1 \leqq m \leqq 354$ に対し

$$a_{m+1}-\beta_m = \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{(2m+1)\pi}{711}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{(2m-1)\pi}{709}\right)$$

$$= \frac{709(2m+1)\pi-711(2m-1)\pi}{711\cdot 709}$$

$$= \frac{-4m+1420}{711\cdot 709}\pi > 0$$

であるから②より $\tan\alpha_m < a_{2m-1} < \tan\beta_m < \tan\alpha_{m+1} < a_{2m+1}$ となる。

したがって $a_{2m-1} < a_{2m+1}$ （$1 \leqq m \leqq 354$）より題意は成り立つ。

(4) ①において $m=355$ とすると

$-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{709\pi}{711}<\theta_{355}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{711}<\theta_{355}<\dfrac{\pi}{2}$ なので $a_{709}>0$

また，①において $m=356$ とすると

$\dfrac{\pi}{2}<\theta_{356}<-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{711\pi}{709}$ より $\dfrac{\pi}{2}<\theta_{356}<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{709}$ なので $a_{711}<0$

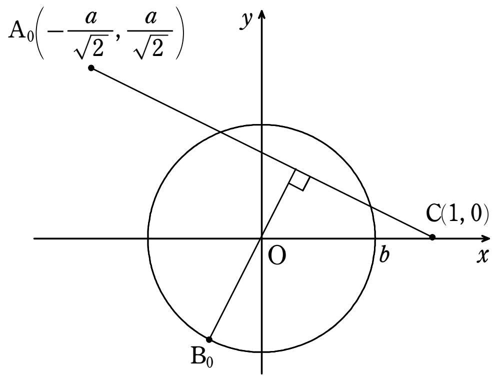
よって，$a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \cdots$ は増加数列ではない。

[東京工業大学 2001 年後期 $\boxed{2}$]

xy 平面の原点 $(0,\ 0)$ を中心とする半径 $a,\ b$ の同心円上にそれぞれ動点 A, B がある。C$(1,\ 0)$ とすると△ABC の面積は，A が $A_0=\left(a\cos\dfrac{3\pi}{4},\ a\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$，B が $B_0=\left(b\cos\dfrac{4\pi}{3},\ b\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ のときに最大値をとるという。

(1) $a,\ b$ を求めよ。

(2) $\triangle A_0B_0C$ の外接円の半径 R を求めよ。



(1) $A_0=\left(a\cos\dfrac{3\pi}{4},\ a\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$B_0=\left(b\cos\dfrac{4\pi}{3},\ b\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=\left(-\dfrac{b}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$

である。

線分 CA_0 に対して原点を中心とする図のような半径 b の円を考える。

B がこの円周上を動くとき，$\triangle A_0BC$ の面積が最大になるのは,

B と直線 CA_0 との距離が最大になるときで，このとき $CA_0\perp OB_0$ となる。

よって $\overrightarrow{CA_0}\cdot\overrightarrow{OB_0}=\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}-1,\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\dfrac{b}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)=0$

$$\left(-a-\sqrt{2},\ a\right)\cdot\left(1,\ \sqrt{3}\right)=0$$

$$a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\quad \text{となる。}$$

同様にして，$CB_0\perp OA_0$ より

$$\overrightarrow{CB_0}\cdot\overrightarrow{OA_0}=\left(-\frac{b}{2}-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$\left(b+2,\ \sqrt{3}b\right)\cdot\left(-1,\ 1\right)=0$$

$$b=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1\quad \text{となる。}$$

(2) (1)より　$\sin\angle \mathrm{A_0CB_0} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　であり,

$$\mathrm{A_0B_0} = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) = 2+\sqrt{3}$$　である。

△ $\mathrm{A_0CB_0}$ において正弦定理より

$$R = \frac{\mathrm{A_0B_0}}{2\sin\angle \mathrm{A_0CB_0}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

となる。