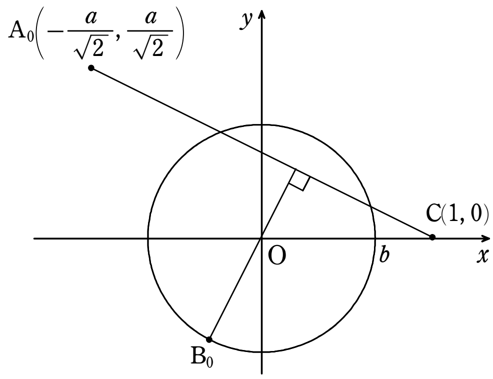
[東京工業大学 2001 年後期 $\boxed{2}$]

xy 平面の原点 $(0,\ 0)$ を中心とする半径 $a,\ b$ の同心円上にそれぞれ動点 A, B がある。C(1, 0) とすると△ABC の面積は， A が $A_0 = \left(a\cos\frac{3\pi}{4},\ a\sin\frac{3\pi}{4}\right)$， B が $B_0 = \left(b\cos\frac{4\pi}{3},\ b\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ のときに最大値をとるという。

(1) $a,\ b$ を求めよ。

(2) $\triangle A_0B_0C$ の外接円の半径 R を求めよ。



(1) $A_0 = \left(a\cos\frac{3\pi}{4},\ a\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$B_0 = \left(b\cos\frac{4\pi}{3},\ b\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{b}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$

である。

線分 CA_0 に対して原点を中心とする図のような半径 b の円を考える。

B がこの円周上を動くとき，$\triangle A_0BC$ の面積が最大になるのは,

B と直線 CA_0 との距離が最大になるときで，このとき $CA_0 \perp OB_0$ となる。

よって $\overrightarrow{CA_0}\cdot\overrightarrow{OB_0} = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}-1,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{b}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b\right) = 0$

$$\left(-a-\sqrt{2},\ a\right)\cdot\left(1,\ \sqrt{3}\right) = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$ となる。

同様にして，$CB_0 \perp OA_0$ より

$$\overrightarrow{CB_0}\cdot\overrightarrow{OA_0} = \left(-\frac{b}{2}-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\left(b+2,\ \sqrt{3}b\right)\cdot\left(-1,\ 1\right) = 0$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$ となる。

(2) (1)より $\sin\angle A_0CB_0=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ であり,

$$A_0B_0=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=2+\sqrt{3}$$ である。

△A_0CB_0において正弦定理より

$$R=\frac{A_0B_0}{2\sin\angle A_0CB_0}=\frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

となる。