

[東京工業大学 2001 年後期 1]



$n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $a_n = \tan(11n)$ とおく。このとき、次の(1)~(4)を示せ。ただし、 $\pi = 3.14159265\dots$ は円周率である。

$$(1) \frac{\pi}{711} < 11 - \frac{7\pi}{2} < \frac{\pi}{709}$$

$$(2) a_1 < 0 < a_2$$

(3) $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{707}, a_{709}$ は増加数列である。

(4) 無限数列 $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ は増加数列ではない。



$$\begin{aligned} (1) \frac{\pi}{711} < 11 - \frac{7\pi}{2} < \frac{\pi}{709} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{711} + \frac{7\pi}{2} < 11 < \frac{\pi}{709} + \frac{7\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{4979}{1422}\pi < 11 < \frac{4965}{1418}\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{15598}{4965} < \pi < \frac{15642}{4979} \end{aligned}$$

である。

$$\text{ここで, } \frac{15598}{4965} = 3.1415911\dots < 3.14159265\dots = \pi$$

$$\frac{15642}{4979} = 3.1415946\dots > 3.14159265\dots = \pi$$

であるから、 $\frac{\pi}{711} < 11 - \frac{7\pi}{2} < \frac{\pi}{709}$ が成り立つ。

(2) $a_1 = \tan 11$, $a_2 = \tan 22$ である。

ここで、(1)から $0 < 11 - \frac{7\pi}{2}$ であり、 $11 < 4\pi$ であるから $\frac{7\pi}{2} < 11 < 4\pi$ である。

よって $-\frac{\pi}{2} < 11 - 4\pi < 0$ が成り立つ。

したがって、 $\tan(11 - 4\pi) = \tan 11 < 0$ から $a_1 < 0$ となる。

また、(1)から $0 < 11 - \frac{7\pi}{2}$ であり、 $22 < \frac{15}{2}\pi$ であるから $7\pi < 22 < \frac{15}{2}\pi$ である。

よって $0 < 22 - 7\pi < \frac{\pi}{2}$ が成り立つ。

したがって、 $\tan(22 - 7\pi) = \tan 22 > 0$ から $0 < a_2$ となる。よって $a_1 < 0 < a_2$ である。

$$(3) (1) \text{より } \frac{\pi}{711} < 11 - \frac{7\pi}{2} < \frac{\pi}{709} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{711} < 11 < \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{709}$$

辺々に $2m-1 > 0$ をかけると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{711} \right) (2m-1) < 11(2m-1) < \left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{709} \right) (2m-1) \\ \Leftrightarrow & \frac{7\pi}{2} (2m-1) + \frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1) < \frac{7\pi}{2} (2m-1) + \frac{(2m-1)\pi}{709} \\ \Leftrightarrow & 7m\pi - \frac{7\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1) < 7m\pi - \frac{7\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{709} \\ \Leftrightarrow & -\frac{\pi}{2} + 7m\pi - 3\pi + \frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1) < -\frac{\pi}{2} + 7m\pi - 3\pi + \frac{(2m-1)\pi}{709} \\ \Leftrightarrow & -\frac{\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{711} < 11(2m-1) - (7m-3)\pi < -\frac{\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{709} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{ここで, } \alpha_m = -\frac{\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{711}, \beta_m = -\frac{\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{709}, \theta_m = 11(2m-1) - (7m-3)\pi \text{ とおくと}$$

$$m = 1, 2, \dots, 355 \text{ に対し } -\frac{\pi}{2} < \alpha_m < \theta_m < \beta_m \leq \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2} \text{ が成り立つ。}$$

したがって $\tan \alpha_m < \tan \theta_m < \tan \beta_m$ である。

$$\theta_m = 11(2m-1) - (7m-3)\pi \text{ なので}$$

$$a_{2m-1} = \tan\{11(2m-1)\} = \tan \theta_m \text{ であるから}$$

$$\tan \alpha_m < a_{2m-1} < \tan \beta_m \text{ が成り立つ。}$$

さらに, $1 \leq m \leq 354$ に対し

$$\begin{aligned} a_{m+1} - \beta_m &= \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(2m+1)\pi}{711} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{709} \right) \\ &= \frac{709(2m+1)\pi - 711(2m-1)\pi}{711 \cdot 709} \\ &= \frac{-4m + 1420}{711 \cdot 709} \pi > 0 \end{aligned}$$

であるから②より $\tan \alpha_m < a_{2m-1} < \tan \beta_m < \tan \alpha_{m+1} < a_{2m+1}$ となる。

したがって $a_{2m-1} < a_{2m+1}$ ($1 \leq m \leq 354$) より題意は成り立つ。

(4) ①において $m=355$ とすると

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{709\pi}{711} < \theta_{355} < \frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{711} < \theta_{355} < \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad a_{709} > 0$$

また, ①において $m=356$ とすると

$$\frac{\pi}{2} < \theta_{356} < -\frac{\pi}{2} + \frac{711\pi}{709} \quad \text{より} \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{356} < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{709} \quad \text{なので} \quad a_{711} < 0$$

よって, $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ は増加数列ではない。