[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

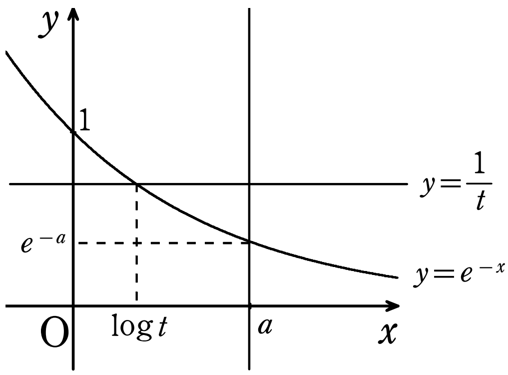
$a>0,\ t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\int_0^a\left|e^{-x}-\frac{1}{t}\right|dx$ を考える。

(1) a を固定したとき，t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $y=e^{-x}$ と $y=\frac{1}{t}$ のグラフは図のようになる。



(i) $\frac{1}{t}\geqq 1$ すなわち $0<t\leqq 1$ のとき

$$S(a,\ t)=\int_0^a-\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx$$

$$=\left[e^{-x}+\frac{x}{t}\right]_0^a$$

$$=e^{-a}+\frac{a}{t}-1$$

であるから $\frac{d}{dt}S(a,\ t)=-\frac{a}{t^2}<0$

(ii) $e^{-a}\leqq\frac{1}{t}\leqq 1$ すなわち $1\leqq t\leqq e^a$ のとき

$$S(a,\ t)=\int_0^{\log t}\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx+\int_{\log t}^a-\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx$$

$$=\left[+e^{-x}-\frac{x}{t}\right]_0^{\log t}+\left[e^{-x}+\frac{x}{t}\right]_{\log t}^a$$

$$=e^{-\log t}-\frac{\log t}{t}-1+e^{-a}+\frac{a}{t}+e^{-\log t}-\frac{\log t}{t}$$

$$=\frac{a-2(1+\log t)}{t}+e^{-a}+1$$

であるから $\frac{d}{dt}S(a,\ t)=\frac{2\log t-a}{t^2}$

$\frac{d}{dt}S(a,\ t)=0$ となるのは $t=e^{\frac{a}{2}}$ のとき。

(iii) $\dfrac{1}{t} \leqq e^{-a}$ すなわち $t \geqq e^{a}$ のとき

$$S(a,\, t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{x}{t} \right]_0^a$$

$$= -e^{-a} - \frac{a}{t} + 1$$

であるから $\dfrac{d}{dt} S(a,\, t) = \dfrac{a}{t^2} > 0$

以上(ｉ)(ⅱ)(iii)より, $S(a,\, t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$
$\dfrac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$
S		↘	極小	↗

$t = e^{\frac{a}{2}}$ のときに最小になるので

$$m(a) = S\left(a,\, e^{\frac{a}{2}} \right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1 = \left(e^{-\frac{a}{2}} - 1 \right)^2$$

(2) $b = -\dfrac{a}{2}$ とおくと $a \to 0$ のとき $b \to 0$ であり,

$$\lim_{a \to 0} m(a) = \lim_{b \to 0} \frac{(e^b - 1)^2}{4b^2}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{b \to 0} \left(\frac{e^b - 1}{b} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

[注] (2)では $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ を使用した。

[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{2}$]

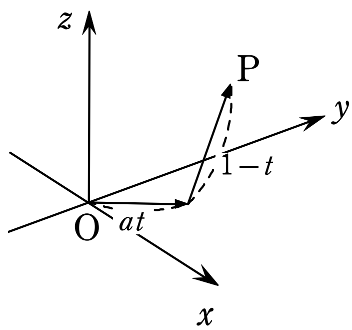
☆──────────────────────────────────────☆

xyz 空間内の動点 P を考える。P は $z \leqq 0$ の部分では最大秒速 a メートルで，$z>0$ の部分では最大秒速 1 メートルで動けるものとする。P がはじめに原点 $(0, 0, 0)$ にあるとき，その 1 秒後までに P が到達し得る範囲の体積を求めよ。ただし，$a>1$ とする。

☆──────────────────────────────────────☆

$B_1=\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ z \leqq 0\}$，$B_2=\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2<1,\ z>0\}$ とおく。

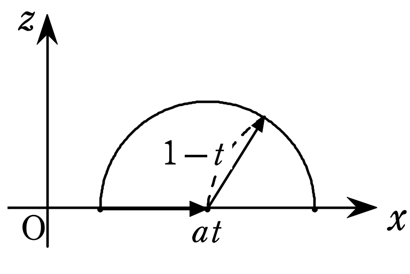
動点 P が原点を出発した後，z 座標が常に $z \leqq 0$ であれば，1 秒後には B_1 のいずれかの点に存在する。また，常に $z>0$ であれば，1 秒後には B_2 のいずれかの点に存在する。また，動点 P が原点を出発した直後に $z>0$ であり，その後 $z \leqq 0$ となる場合があっても，$a>1$ だから，点 P は $B_1 \cup B_2$ のいずれかの点に到達している。



そこで，$t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ 秒後まで点 P が xy 平面を直進し，それ以後は $z>0$ の領域内を直進する場合について考察する。

対称性を考えて，点 P は zx 平面の $x \geqq 0$ の部分を運動するとする。

このとき，点 P の到達し得る範囲は，



半円 $C_t:\begin{cases}(x-at)^2+z^2=(1-t)^2 & \cdots ① \\ z \geqq 0 & \cdots ②\end{cases}$ の

$0 \leqq t \leqq 1$ における通過領域

に他ならない。

①から $(a^2-1)t^2-2(ax-1)t+x^2+z^2-1=0$ である。

ここで，$f(t)=(a^2-1)t^2-2(ax-1)t+x^2+z^2-1$ とおく。

$f(t)=0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ で少なくとも 1 つの実数解をもつ条件を考える。

$a^2-1>0$ に注意すると

$$f(0) \cdot f(1) \leqq 0 \quad \cdots ③ \qquad \text{または} \qquad \begin{cases} f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0 & \cdots ④ \\ 0 \leqq \dfrac{ax-1}{a^2-1} \leqq 1 & \cdots ⑤ \\ (ax-1)^2-(a^2-1)(x^2+z^2-1) \geqq 0 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

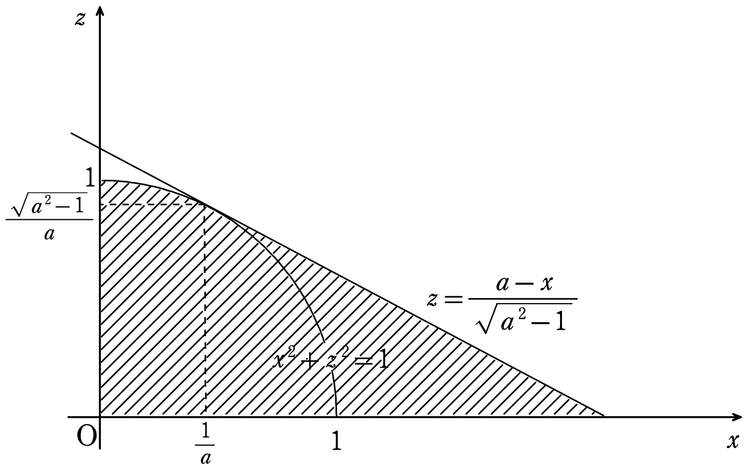
となる。

③から $(x^2+z^2-1)\{(x-a)^2+z^2\}\leqq 0$ より

$x^2+z^2\leqq 1$ または $(x,\ z)=(a,\ 0)$

④⑤⑥から $x^2+z^2\geqq 1,\ \dfrac{1}{a}\leqq x\leqq a,\ z\leqq \dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-1}}$

したがって，②より C_t の通過領域は図の斜線部分のようになり，この部分を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積と B_1 の体積の和が求める体積である。



よって求める体積は

$$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}\left(\sqrt{a^2-1}\,z-a\right)^2dz+\pi\int_{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}^{1}\left(1-z^2\right)dz+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\pi\left[\frac{\left(\sqrt{a^2-1}\,z-a\right)^3}{3\sqrt{a^2-1}}\right]_0^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}+\pi\left[z-\frac{z^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}^{1}+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\frac{\pi}{3a}\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)\sqrt{a^2-1}+\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3a}\left(2+\frac{1}{a^2}\right)\sqrt{a^2-1}+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\frac{2\pi}{3}(a^3+1)+\frac{\pi}{3a}\left(a^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

[注] 半円 $C_t:\begin{cases}(x-at)^2+z^2=(1-t)^2\\ z\geqq 0\end{cases}$ を $0\leqq t\leqq 1$ で変化させていくと, ある直線に接しながら動いていく。その直線は $f(t)=0$ の判別式 $(ax-1)^2-(a^2-1)(x^2+z^2-1)=0$ から得られる。これは包絡線と呼ばれる。通常，$F(x,\ y,\ t)=0$ と $\dfrac{d}{dt}F(x,\ y,\ t)=0$ から t を消去した式で表されるものであり，$F(x,\ y,\ t)=0$ が t についての 2 次方程式の場合，包絡線は「(判別式)＝0」と一致する。

[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{3}$]

箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき，はじめから j 回目 $(j=1,\cdots\cdots,k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし， $X_1,\cdots\cdots,X_k$ のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1) $N \geqq 3$ のとき $P_N(1),\ P_N(2),\ P_N(3)$ を N で表せ。

(2) $P_3(4),\ P_4(5)$ を求めよ。

(3) $k \leqq N$ のとき，$P_N(k)$ を N と k で表せ。

(1) 第 i 回目に取り出したカードの番号を x_i $(1 \leqq x_i \leqq N)$ とする。

このとき $X_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j$ であるから $X_j \geqq j$ である。

したがって

$$P_N(1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{N}$$

$$P_N(2) = P(X_1 = 2 \text{ または } X_2 = 2) = P(X_1 = 2) + P(X_2 = 2) \quad \cdots①$$

ここで， $X_1 = 2$ となるのは 1 回目に 2 が出るときで，

$X_2 = 2$ となるのは 1, 1 のように続けて出るときだから

$$① = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} = \frac{N+1}{N^2}$$

$$P_N(3) = P(X_1 = 3 \text{ または } X_2 = 3 \text{ または } X_3 = 3) = P(X_1 = 3) + P(X_2 = 3) + P(X_3 = 3) \quad \cdots②$$

ここで， $X_1 = 3$ となるのは 1 回目に 3 が出るときで，

$X_2 = 3$ となるのは 1, 2 または 2, 1 のように続けて出るときで，

$X_3 = 3$ となるのは 1, 1, 1 のように続けて出るときだから

$$② = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{1}{N^3} = \frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2) 1 から 3 までの番号が書かれた 3 枚のカードから取り出す場合，$X_1=4,\ X_1=5$ はありえない。

よって $P_3(4)=P(X_2=4)+P(X_3=4)+P(X_4=4)$

$$=\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{37}{81}$$

同様にして $P_3(5)=P(X_2=5)+P(X_3=5)+P(X_4=5)+P(X_5=5)$

$$=\frac{2}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{1}{3^5}=\frac{121}{243}$$

(3) $k \leqq N$ のとき

$P_N(k)=P(X_1=k)+P(X_2=k)+\cdots+P(X_k=k)$

ここで，1 以上 k 以下の j の対して

$$X_j=k \iff x_1+x_2+\cdots+x_j=k$$

$$\iff (x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_j-1)=k-j$$

$$\iff y_1+y_2+\cdots+y_j=k-j \quad \text{（ただし，} \ y_i=x_i-1,\ 1\leqq i\leqq j\text{）} \cdots ③$$

であり，③を満たす 0 以上の整数解$(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_j)$の個数は

$j-1$個の仕切り「｜」と$k-j$個の「○」の合計$k-1$個の中から，$j-1$個の仕切りを選ぶ組合せに対応させられる（「重複組合せ」の考え方）から ${}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}$ 通り。

したがって

$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j}=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0}{N^1}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{N^2}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0N^{k-1}}{N^k}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1N^{k-2}}{N^k}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{k}{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}N^{j-1}$$

$$=\frac{1}{N^k}\sum_{j=0}^{k-1}{}_{k-1}\mathrm{C}_{j}N^{j}$$

$$=\frac{(1+N)^{k-1}}{N^k}$$

となる。

[注] (3)の数学的帰納法による別解は次の通り。

$k \leqq N$ のとき $P_N(k)=\dfrac{(1+N)^{k-1}}{N^k}$ であることを数学的帰納法で示す。

(ｉ) $k=1$のとき

(１)の結果より成り立つ。

(ii) $k \leqq \ell$ $(\ell \leqq N-1)$ のとき，題意が成り立つと仮定する。

すなわち $P_N(1)=\dfrac{1}{N},\ P_N(1)=\dfrac{N+1}{N^2},\ \cdots,\ P_N(\ell)=\dfrac{(1+N)^{\ell-1}}{N^{\ell}}$ であるとする。

$(\ell+1)$ 回の試行を，最初の１回と続く残りの ℓ 回の試行に分けて考えると

$P_N(\ell+1)=$「最初に $\ell+1$が出る確率」

＋「最初に ℓ が出て，２回目に1が出る確率」

＋「最初に $\ell-1$が出て，２回目からの和がちょうど２となることがある確率」

＋…＋「最初が１で，２回目からの和がちょうど ℓ となることがある確率」

$$=\frac{1}{N}+\frac{1}{N}P_N(1)+\frac{1}{N}P_N(2)+\cdots+\frac{1}{N}P_N(\ell)$$

$$=\frac{1}{N}\left\{1+\frac{1}{N}+\frac{N+1}{N^2}+\cdots+\frac{(1+N)^{\ell-1}}{N^{\ell}}\right\}$$

$$=\frac{1}{N}\left\{1+\frac{\frac{1}{N}\left\{1-\left(\frac{N+1}{N}\right)^{\ell}\right\}}{1-\frac{N+1}{N}}\right\}$$

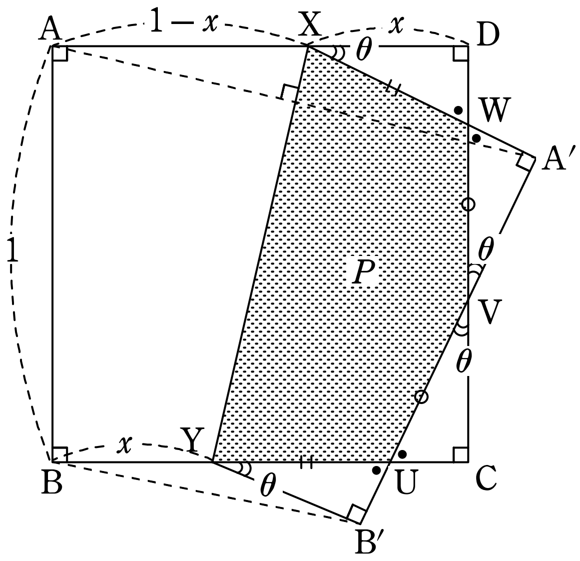
$$=\frac{(1+N)^{\ell}}{N^{\ell+1}}$$

よって $k=\ell+1$ のときも成り立つ。

(ｉ)(ii)より，数学的帰納法によって題意は示された。

[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{4}$]

一辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を P とする。P が線対称な五角形になるように折るとき，P の面積の最小値を求めよ。



正方形の各頂点を A, B, C, D とする。線分に沿って折り曲げたとき，P が五角形になるためには，線分の両端の点は向かい合う 2 辺の上になければならない。その両端の点を X, Y とし，さらに，点 A´, B´, U, V, W を図のように定める。五角形 P が線対称になるとき，△XDW，△VA´W，△VCU，△YB´U がすべて相似であることから，$\mathrm{DX}=\mathrm{BY},\ \mathrm{AX}\neq\mathrm{XD}$ である。
このとき，$\mathrm{AX}>\mathrm{XD}$ としても一般性を失わない。

$\mathrm{DX}=x\ \left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$，$\angle\mathrm{DXW}=\theta\ \left(0^\circ<\theta<90^\circ\right)$ とすると

$$\mathrm{DW}=x\tan\theta,\quad \mathrm{WV}=\frac{\mathrm{WA'}}{\sin\theta}=\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\frac{1}{\sin\theta},\quad VC=VA'=\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\frac{1}{\tan\theta}$$

であるから $\mathrm{DW}+\mathrm{WV}+\mathrm{VC}=1$

$$\Leftrightarrow\ x\tan\theta+\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\frac{1}{\sin\theta}+\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\frac{1}{\tan\theta}=1$$

$$\Leftrightarrow\ x\tan\theta+\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x+\left\{1-\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)x\right\}\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\sin^2\theta\right)x+\left\{\cos\theta-\left(\cos\theta+1\right)x\right\}\left(1+\cos\theta\right)=\sin\theta\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow\ \left\{\sin^2\theta-(1+\cos\theta)^2\right\}x=\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\left(1+\cos\theta\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \left\{\sin^2\theta-(1+\cos\theta)^2\right\}x=\cos\theta\left\{\sin\theta-\left(1+\cos\theta\right)\right\}$$

ここで，$-45^\circ < \theta - 45^\circ < 45^\circ$ より $\sin\theta - \left(1+\cos\theta\right) = \sqrt{2}\sin(\theta - 45^\circ) - 1 < 0$ なので

$$x = \frac{\cos\theta\left\{\sin\theta - \left(1+\cos\theta\right)\right\}}{\sin^2\theta - (1+\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta + 1 + \cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 1}$$ となる。

$S_1 = \triangle\mathrm{XDW} + \triangle\mathrm{VCU}$ とすると，

$$S_1 = \frac{1}{2}x^2\tan\theta + \frac{1}{2}\left(1 - x - \frac{x}{\cos\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\left(\sin\theta + \cos\theta + 1\right)^2}$$

ここで，$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと

$t = = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$ であり $45^\circ < \theta + 45^\circ < 135^\circ$ より $1 < t \leqq \sqrt{2}$

$t^2 = \left(\sin\theta + \cos\theta\right)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ より $2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$ であるから

$$S_1 = \frac{t^2 - 1}{2(t+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{t+1}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$ （等号は $t = \sqrt{2}$ のとき）

五角形 P の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\left\{x + (1-x)\right\} - S_1 = \frac{1}{2} - S_1$$

であり，S が最大となるのは S_1 が最小となるときである。

よって P の面積の最大値は $\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$

[注]　$\mathrm{YU} = y$ とし，y を x で表した後，相加平均・相乗平均の関係式を利用する方法もある。