[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{4}$]

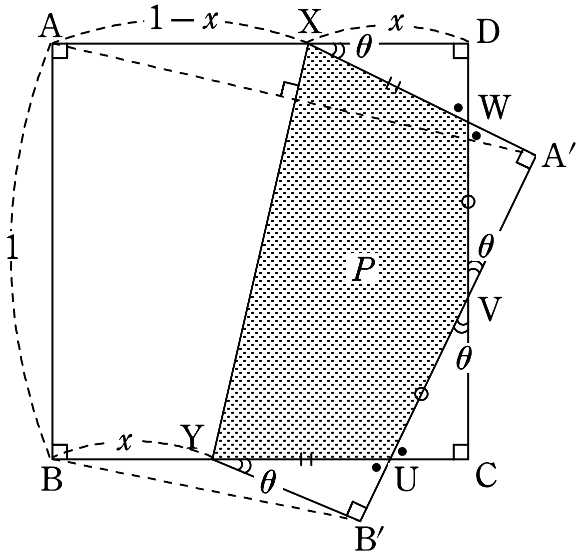
☆―――☆

一辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を P とする。P が線対称な五角形になるように折るとき，P の面積の最小値を求めよ。

☆―――☆

正方形の各頂点を A, B, C, D とする。線分に沿って折り曲げたとき，P が五角形になるためには，線分の両端の点は向かい合う 2 辺の上になければならない。その両端の点を X, Y とし，さらに，点 A′, B′, U, V, W を図のように定める。五角形 P が線対称になるとき，△XDW，△VA′W，△VCU，△YB′U がすべて相似であることから，$\mathrm{DX}=\mathrm{BY},\ \mathrm{AX}\neq\mathrm{XD}$ である。

このとき，$\mathrm{AX}>\mathrm{XD}$ としても一般性を失わない。



$\mathrm{DX}=x\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$，$\angle\mathrm{DXW}=\theta\ \left(0^\circ<\theta<90^\circ\right)$ とすると

$$\mathrm{DW}=x\tan\theta,\quad \mathrm{WV}=\frac{\mathrm{WA'}}{\sin\theta}=\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\frac{1}{\sin\theta},\quad VC=VA'=\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\frac{1}{\tan\theta}$$

であるから $\mathrm{DW}+\mathrm{WV}+\mathrm{VC}=1 \Leftrightarrow x\tan\theta+\left(1-x-\dfrac{x}{\cos\theta}\right)\dfrac{1}{\sin\theta}+\left(1-x-\dfrac{x}{\cos\theta}\right)\dfrac{1}{\tan\theta}=1$

$$\Leftrightarrow x\tan\theta+\left(1-x-\frac{x}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x+\left\{1-\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)x\right\}\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2\theta\right)x+\left\{\cos\theta-\left(\cos\theta+1\right)x\right\}\left(1+\cos\theta\right)=\sin\theta\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \left\{\sin^2\theta-(1+\cos\theta)^2\right\}x=\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\left(1+\cos\theta\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\sin^2\theta-(1+\cos\theta)^2\right\}x=\cos\theta\left\{\sin\theta-\left(1+\cos\theta\right)\right\}$$

ここで，$-45^\circ < \theta - 45^\circ < 45^\circ$ より $\sin\theta - (1+\cos\theta) = \sqrt{2}\sin(\theta - 45^\circ) - 1 < 0$ なので

$$x = \frac{\cos\theta\{\sin\theta - (1+\cos\theta)\}}{\sin^2\theta - (1+\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta + 1 + \cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 1}$$ となる。

$S_1 = \triangle\mathrm{XDW} + \triangle\mathrm{VCU}$ とすると，

$$S_1 = \frac{1}{2}x^2\tan\theta + \frac{1}{2}\left(1 - x - \frac{x}{\cos\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta + 1)^2}$$

ここで，$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと

$t = = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$ であり $45^\circ < \theta + 45^\circ < 135^\circ$ より $1 < t \leqq \sqrt{2}$

$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ より $2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$ であるから

$$S_1 = \frac{t^2 - 1}{2(t+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{t+1}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$ （等号は $t = \sqrt{2}$ のとき）

五角形 P の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\{x + (1-x)\} - S_1 = \frac{1}{2} - S_1$$

であり，S が最大となるのは S_1 が最小となるときである。

よって P の面積の最大値は $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$

[注] $\mathrm{YU} = y$ とし，y を x で表した後，相加平均・相乗平均の関係式を利用する方法もある。