[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{3}$]

箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき，はじめから j 回目 $(j=1,\ \cdots\cdots,\ k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし， $X_1,\ \cdots\cdots,\ X_k$ のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1) $N \geqq 3$ のとき $P_N(1),\ P_N(2),\ P_N(3)$ を N で表せ。

(2) $P_3(4),\ P_4(5)$ を求めよ。

(3) $k \leqq N$ のとき，$P_N(k)$ を N と k で表せ。

---

(1) 第 i 回目に取り出したカードの番号を x_i $(1 \leqq x_i \leqq N)$ とする。

このとき $X_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j$ であるから $X_j \geqq j$ である。

したがって

$$P_N(1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{N}$$

$$P_N(2) = P(X_1 = 2 \text{ または } X_2 = 2) = P(X_1 = 2) + P(X_2 = 2) \quad \cdots ①$$

ここで， $X_1 = 2$ となるのは 1 回目に 2 が出るときで，

$X_2 = 2$ となるのは 1, 1 のように続けて出るときだから

$$① = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} = \frac{N+1}{N^2}$$

$$P_N(3) = P(X_1 = 3 \text{ または } X_2 = 3 \text{ または } X_3 = 3) = P(X_1 = 3) + P(X_2 = 3) + P(X_3 = 3) \quad \cdots ②$$

ここで， $X_1 = 3$ となるのは 1 回目に 3 が出るときで，

$X_2 = 3$ となるのは 1, 2 または 2, 1 のように続けて出るときで，

$X_3 = 3$ となるのは 1, 1, 1 のように続けて出るときだから

$$② = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{1}{N^3} = \frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2) 1 から 3 までの番号が書かれた 3 枚のカードから取り出す場合, $X_1=4,\ X_1=5$ はありえない。

よって $P_3(4)=P(X_2=4)+P(X_3=4)+P(X_4=4)$

$$=\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{37}{81}$$

同様にして $P_3(5)=P(X_2=5)+P(X_3=5)+P(X_4=5)+P(X_5=5)$

$$=\frac{2}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{1}{3^5}=\frac{121}{243}$$

(3) $k \leqq N$ のとき

$P_N(k)=P(X_1=k)+P(X_2=k)+\cdots+P(X_k=k)$

ここで, 1 以上 k 以下の j の対して

$$X_j=k \iff x_1+x_2+\cdots+x_j=k$$

$$\iff (x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_j-1)=k-j$$

$$\iff y_1+y_2+\cdots+y_j=k-j \quad （ただし,\ y_i=x_i-1,\ 1\leqq i\leqq j）\cdots③$$

であり, ③を満たす 0 以上の整数解 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_j)$ の個数は

$j-1$ 個の仕切り「｜」と $k-j$ 個の「〇」の合計 $k-1$ 個の中から, $j-1$ 個の仕切りを選ぶ組合

せに対応させられる（「重複組合せ」の考え方）から ${}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}$ 通り。

したがって

$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j}=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0}{N^1}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{N^2}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0N^{k-1}}{N^k}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1N^{k-2}}{N^k}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{k}{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}N^{j-1}$$

$$=\frac{1}{N^k}\sum_{j=0}^{k-1}{}_{k-1}\mathrm{C}_jN^j$$

$$=\frac{(1+N)^{k-1}}{N^k}$$

となる。

[注] (3)の数学的帰納法による別解は次の通り。

$k \leqq N$ のとき $P_N(k) = \dfrac{(1+N)^{k-1}}{N^k}$ であることを数学的帰納法で示す。

(ⅰ) $k=1$のとき

(1)の結果より成り立つ。

(ⅱ) $k \leqq \ell$ $(\ell \leqq N-1)$ のとき，題意が成り立つと仮定する。

すなわち $P_N(1) = \dfrac{1}{N}$, $P_N(1) = \dfrac{N+1}{N^2}$, $\cdots$, $P_N(\ell) = \dfrac{(1+N)^{\ell-1}}{N^\ell}$ であるとする。

$(\ell+1)$ 回の試行を，最初の１回と続く残りの ℓ 回の試行に分けて考えると

$P_N(\ell+1) =$「最初に $\ell+1$ が出る確率」

＋「最初に ℓ が出て，2 回目に1が出る確率」

＋「最初に $\ell-1$ が出て，2 回目からの和がちょうど 2 となることがある確率」

＋…＋「最初が 1 で，2 回目からの和がちょうど ℓ となることがある確率」

$$= \frac{1}{N} + \frac{1}{N}P_N(1) + \frac{1}{N}P_N(2) + \cdots + \frac{1}{N}P_N(\ell)$$

$$= \frac{1}{N}\left\{1 + \frac{1}{N} + \frac{N+1}{N^2} + \cdots + \frac{(1+N)^{\ell-1}}{N^\ell}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\left\{1 + \frac{\dfrac{1}{N}\left\{1-\left(\dfrac{N+1}{N}\right)^\ell\right\}}{1-\dfrac{N+1}{N}}\right\}$$

$$= \frac{(1+N)^\ell}{N^{\ell+1}}$$

よって $k=\ell+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。