[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{2}$]

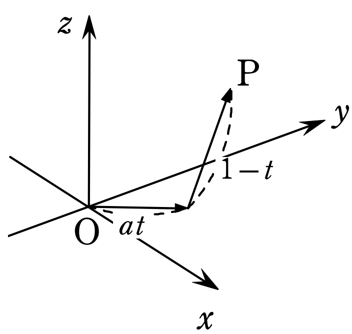
☆────────────────────☆

xyz 空間内の動点 P を考える。P は $z \leqq 0$ の部分では最大秒速 a メートルで，$z>0$ の部分では最大秒速 1 メートルで動けるものとする。P がはじめに原点 $(0, 0, 0)$ にあるとき，その 1 秒後までに P が到達し得る範囲の体積を求めよ。ただし，$a>1$ とする。

☆────────────────────☆

$B_1=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ z \leqq 0\}$，$B_2=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2<1,\ z>0\}$ とおく。

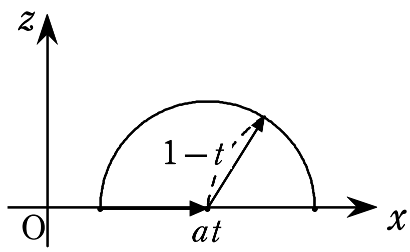
動点 P が原点を出発した後，z 座標が常に $z \leqq 0$ であれば，1 秒後には B_1 のいずれかの点に存在する。また，常に $z>0$ であれば，1 秒後には B_2 のいずれかの点に存在する。また，動点 P が原点を出発した直後に $z>0$ であり，その後 $z \leqq 0$ となる場合があっても，$a>1$ だから，点 P は $B_1 \cup B_2$ のいずれかの点に到達している。



そこで，t $(0 \leqq t \leqq 1)$ 秒後まで点 P が xy 平面を直進し，それ以後は $z>0$ の領域内を直進する場合について考察する。

対称性を考えて，点 P は zx 平面の $x \geqq 0$ の部分を運動するとする。

このとき，点 P の到達し得る範囲は，



半円 $C_t:\begin{cases}(x-at)^2+z^2=(1-t)^2 & \cdots ① \\ z \geqq 0 & \cdots ②\end{cases}$ の

$0 \leqq t \leqq 1$ における通過領域

に他ならない。

①から $(a^2-1)t^2-2(ax-1)t+x^2+z^2-1=0$ である。

ここで，$f(t)=(a^2-1)t^2-2(ax-1)t+x^2+z^2-1$ とおく。

$f(t)=0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ で少なくとも 1 つの実数解をもつ条件を考える。

$a^2-1>0$ に注意すると

$$f(0)\cdot f(1) \leqq 0 \ \cdots ③ \quad \text{または} \quad \begin{cases} f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0 & \cdots ④ \\ 0 \leqq \dfrac{ax-1}{a^2-1} \leqq 1 & \cdots ⑤ \\ (ax-1)^2-(a^2-1)(x^2+z^2-1) \geqq 0 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

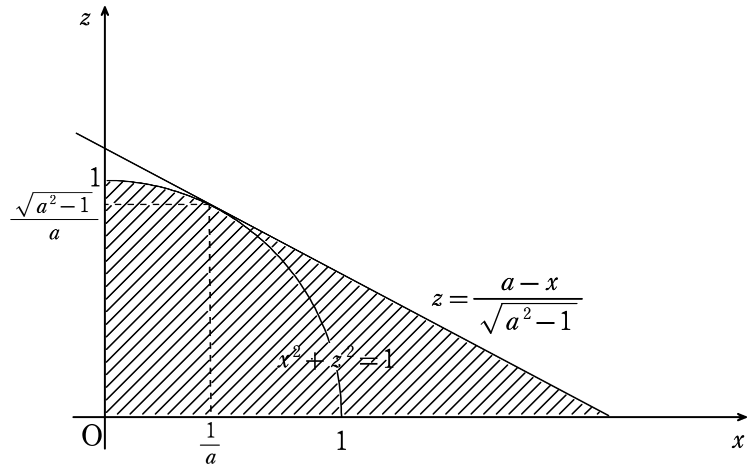
となる。

③から $(x^2+z^2-1)\{(x-a)^2+z^2\}\leqq 0$ より

$x^2+z^2\leqq 1$ または $(x,\ z)=(a,\ 0)$

④⑤⑥から $x^2+z^2\geqq 1,\ \dfrac{1}{a}\leqq x\leqq a,\ z\leqq\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-1}}$

したがって，②より C_t の通過領域は図の斜線部分のようになり，この部分を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積と B_1 の体積の和が求める体積である。



よって求める体積は

$$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}\left(\sqrt{a^2-1}\,z-a\right)^2dz+\pi\int_{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}^{1}\left(1-z^2\right)dz+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\pi\left[\frac{\left(\sqrt{a^2-1}\,z-a\right)^3}{3\sqrt{a^2-1}}\right]_0^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}+\pi\left[z-\frac{z^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}^{1}+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\frac{\pi}{3a}\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)\sqrt{a^2-1}+\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3a}\left(2+\frac{1}{a^2}\right)\sqrt{a^2-1}+\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=\frac{2\pi}{3}(a^3+1)+\frac{\pi}{3a}\left(a^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

[注] 半円 $C_t:\begin{cases}(x-at)^2+z^2=(1-t)^2\\ z\geqq 0\end{cases}$ を $0\leqq t\leqq 1$ で変化させていくと, ある直線に接しながら動いていく。その直線は $f(t)=0$ の判別式 $(ax-1)^2-(a^2-1)(x^2+z^2-1)=0$ から得られる。これは包絡線と呼ばれる。通常，$F(x,\ y,\ t)=0$ と $\dfrac{d}{dt}F(x,\ y,\ t)=0$ から t を消去した式で表されるものであり，$F(x,\ y,\ t)=0$ が t についての 2 次方程式の場合，包絡線は「(判別式)＝0」と一致する。