[東京工業大学 2001 年 前期 $\boxed{1}$]

☆ ────────────────────────────── ☆

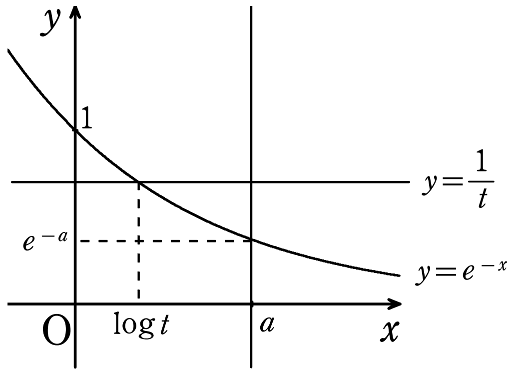
$a>0,\ t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\int_0^a\left|e^{-x}-\dfrac{1}{t}\right|dx$ を考える。

(1) a を固定したとき，t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。

☆ ────────────────────────────── ☆

(1) $y=e^{-x}$ と $y=\dfrac{1}{t}$ のグラフは図のようになる。



(i) $\dfrac{1}{t}\geqq1$ すなわち $0<t\leqq1$ のとき

$$S(a,\ t)=\int_0^a-\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx$$

$$=\left[e^{-x}+\frac{x}{t}\right]_0^a$$

$$=e^{-a}+\frac{a}{t}-1$$

であるから $\dfrac{d}{dt}S(a,\ t)=-\dfrac{a}{t^2}<0$

(ii) $e^{-a}\leqq\dfrac{1}{t}\leqq1$ すなわち $1\leqq t\leqq e^a$ のとき

$$S(a,\ t)=\int_0^{\log t}\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx+\int_{\log t}^a-\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx$$

$$=\left[+e^{-x}-\frac{x}{t}\right]_0^{\log t}+\left[e^{-x}+\frac{x}{t}\right]_{\log t}^a$$

$$=e^{-\log t}-\frac{\log t}{t}-1+e^{-a}+\frac{a}{t}+e^{-\log t}-\frac{\log t}{t}$$

$$=\frac{a-2(1+\log t)}{t}+e^{-a}+1$$

であるから $\dfrac{d}{dt}S(a,\ t)=\dfrac{2\log t-a}{t^2}$

$\dfrac{d}{dt}S(a,\ t)=0$ となるのは $t=e^{\frac{a}{2}}$ のとき。

(iii) $\dfrac{1}{t} \leqq e^{-a}$ すなわち $t \geqq e^{a}$ のとき

$$S(a,\, t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{x}{t} \right]_0^a$$

$$= -e^{-a} - \frac{a}{t} + 1$$

であるから $\dfrac{d}{dt} S(a,\, t) = \dfrac{a}{t^2} > 0$

以上(ⅰ)(ⅱ)(iii)より，$S(a,\, t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$
$\dfrac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$
S		↘	極小	↗

$t = e^{\frac{a}{2}}$ のときに最小になるので

$$m(a) = S\left(a,\, e^{\frac{a}{2}} \right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1 = \left(e^{-\frac{a}{2}} - 1 \right)^2$$

(2) $b = -\dfrac{a}{2}$ とおくと $a \to 0$ のとき $b \to 0$ であり，

$$\lim_{a \to 0} m(a) = \lim_{b \to 0} \frac{(e^b - 1)^2}{4b^2}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{b \to 0} \left(\frac{e^b - 1}{b} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

[注] (2)では $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ を使用した。