[東京工業大学 2000年後期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

実数$a,\ b$に対し　$f(x)=x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab$　とおく。

(1)　$f(x)$を因数分解せよ、

(2) すべての　$x \geqq 0$　に対し　$f(x) \geqq 0$　が成り立つための$a,\ b$の条件を求め，それを満たす点$(a,\ b)$

の存在する範囲を図示せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)　$f(x)=x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab$

$=(x+a)\{x^2-(a-1)x+b\}$

(2)（ｉ）$a \geqq 0$　のとき

$x \geqq 0$　のとき　$x+a \geqq 0$（等号成立は　$x=a=0$　のとき）であるから

すべての　$x \geqq 0$　に対し，$x^2-(a-1)x+b \geqq 0$　となる条件を求めればよい。

$g(x)=x^2-(a-1)x+b\ =\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-\dfrac{(a-1)^2}{4}+b$　とおくと

（ｉ－A）$\dfrac{a-1}{2} \leqq 0$　すなわち$0 \leqq a \leqq 1$　のとき

$g(0)=b \geqq 0$

（ｉ－B）$\dfrac{a-1}{2}>0$　すなわち　$a>1$　のとき

$g\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=-\dfrac{(a-1)^2}{4}+b \geqq 0$

となればよい。

（ii）$a<0$　のとき

(1)の結果より　$x=-a>0$　において　$f(-a)=0$　であるから

$g(-a)=0$　でなければならない。

よって　$g(-a)=a^2-(a-1)(-a)+b=2a^2-a+b=0$　より

$b=-2a^2+a=-2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$

このとき，$f(x)=(x+a)^2\{x-(2a-1)\}$　となり，$2a-1<0$　であるから

　$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ を満たしている。

（ⅰ），（ⅱ）より求める $a,\ b$ の条件は

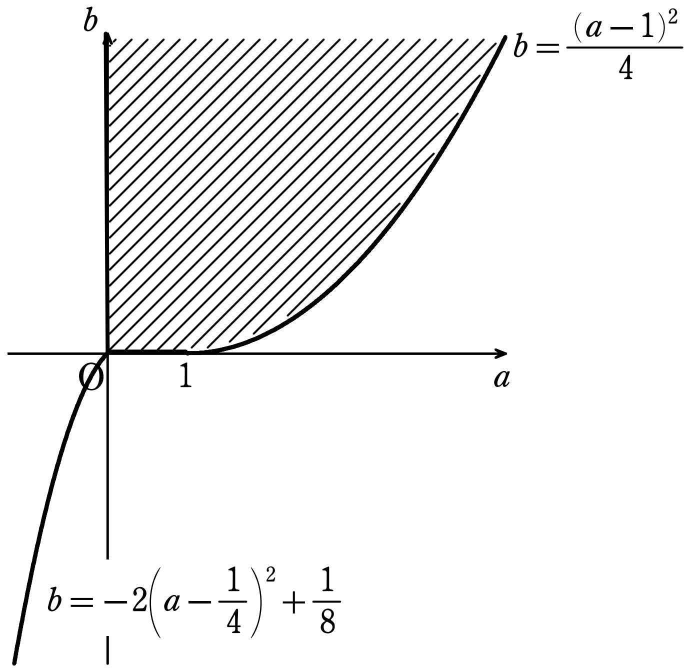
「$0 \leqq a \leqq 1$ かつ $b \geqq 0$」

または「$a > 1$ かつ $b \geqq \dfrac{(a-1)^2}{4}$」

または「$a < 0$ かつ $b = -2\left(a - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{8}$」

となり，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示すると次の図の斜線部分と実線部分である。

ただし，境界上の点はすべて含む。



［ 東京工業大学 2000 年後期 $\boxed{2}$ ］

(1) $m≧0$, $n≧1$である整数m, nにたいし,

$$a_{m,\,n}=\int_0^{\pi}\theta^m\cos n\theta\,d\theta\ ,\ b_{m,\,n}=\int_0^{\pi}\theta^m\sin n\theta\,d\theta$$

とおくとき，次の式を示せ。

$$a_{m+1,\,n}=-\frac{m+1}{n}b_{m,\,n}\ ,\ \ b_{m+1,\,n}=(-1)^{n+1}\frac{\pi^{m+1}}{n}+\frac{m+1}{n}a_{m,\,n}$$

(2) 半径 1 の球面上の定点を端点とする長さπのひもを考える。

このひもが球の外側の空間を動くとき，ひもの通過しうる領域の体積を求めよ。

---

(1) $a_{m+1,\,n}=\int_0^{\pi}\theta^{m+1}\cos n\theta\,d\theta$

$$=\int_0^{\pi}\theta^{m+1}\left(\frac{\sin n\theta}{n}\right)'d\theta$$

$$=\left[\theta^{m+1}\cdot\frac{\sin n\theta}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{m+1}{n}\int_0^{\pi}\theta^m\sin n\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{m+1}{n}b_{m,\,n}$$

$b_{m+1,\,n}=\int_0^{\pi}\theta^{m+1}\sin n\theta\,d\theta$

$$=\int_0^{\pi}\theta^{m+1}\left(-\frac{\cos n\theta}{n}\right)'d\theta$$

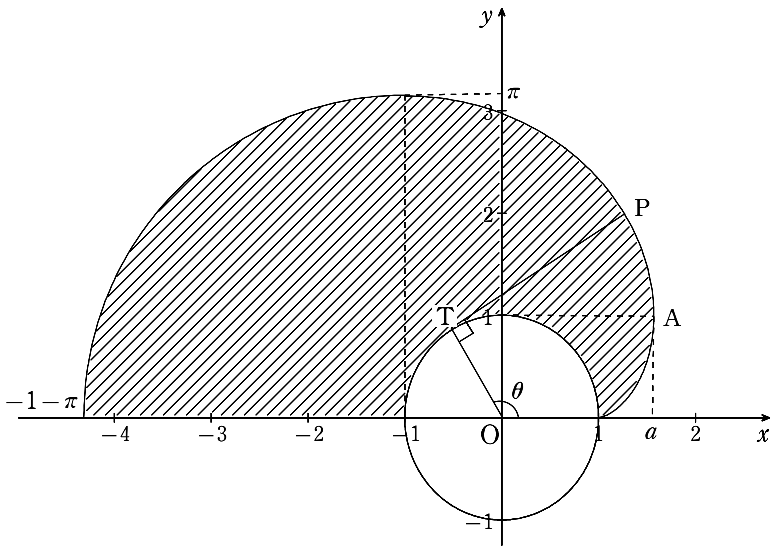
$$=\left[\theta^{m+1}\cdot\left(-\frac{\cos n\theta}{n}\right)\right]_0^{\pi}+\frac{m+1}{n}\int_0^{\pi}\theta^m\cos n\theta\,d\theta$$

$$=\pi^{m+1}\left(-\frac{\cos n\pi}{n}\right)+\frac{m+1}{n}a_{m,\,n}$$

nが偶数のとき$\cos n\pi=1$，nが奇数のとき$\cos n\pi=-1$ なので

$$b_{m+1,\,n}=(-1)^{n+1}\frac{\pi^{m+1}}{n}+\frac{m+1}{n}a_{m,\,n}$$

(2) 図のように長さ π のひもの端点を $(-1, 0)$ に固定し，ひもをたるむことなく伸ばしたときのもう一方の端点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする。円と伸開線との接点を T とし，$\angle \mathrm{TO}x=\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ なので

$x=\cos\theta+\theta\sin\theta$，$y=\sin\theta-\theta\cos\theta$ と媒介変数表示できる。

図の斜線部分を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V が求めるものである。

図のように曲線上の $x=a$ である点 A に対応する θ を θ_a とし，

曲線の $0 \leqq \theta \leqq \theta_a$ に対応する部分を y_-，$\theta_a \leqq \theta \leqq \pi$ に対応する部分を y_+ とすると

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\pi^3+\int_{-1}^{a}\pi {y_+}^2dx-\int_{1}^{a}\pi {y_-}^2dx-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3$$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+\pi\int_{\pi}^{\theta_a}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\pi\int_{0}^{\theta_a}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+\pi\int_{\pi}^{\theta_a}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta+\pi\int_{\theta_a}^{0}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+\pi\int_{\pi}^{0}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{4}{3}\pi$$

ここで，右辺第 2 項について

$$\int_{\pi}^{0}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2(-\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}(\sin^2\theta-2\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\cos^2\theta)(-\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}(-\theta\sin^2\theta\cos\theta+2\theta^2\sin\theta\cos^2\theta-\theta^3\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta+2\theta^2\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)-\theta^3\cos^3\theta\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\theta\cos\theta+\theta\cos^3\theta+2\theta^2\sin\theta-2\theta^2\sin^3\theta-\theta^3\cos^3\theta\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\theta\cos\theta+\theta\cdot\frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)+2\theta^2\sin\theta-2\theta^2\cdot\frac{1}{4}\left(-\sin 3\theta+3\sin\theta\right)-\theta^3\cdot\frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\frac{\theta\cos\theta}{4}+\frac{\theta\cos 3\theta}{4}-\frac{\theta^3\cos\theta}{4}-\frac{3\theta^3\cos 3\theta}{4}+\frac{\theta^2\sin\theta}{2}+\frac{\theta^2\sin 3\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}a_{1,1}+\frac{1}{4}a_{1,3}-\frac{1}{4}a_{3,3}-\frac{3}{4}a_{3,1}+\frac{1}{2}b_{2,3}+\frac{1}{2}b_{2,1}$$

となる。

$$a_{1,1}=\int_0^{\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=-2$$

$$a_{1,3}=\int_0^{\pi}\theta\cos 3\theta\,d\theta=\left[\theta\cdot\frac{1}{3}\sin 3\theta\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin 3\theta\,d\theta=-\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{9}$$

であることと，$b_{2,1}=(-1)^2\cdot\dfrac{\pi^2}{1}+\dfrac{2}{1}a_{1,1}$，$b_{2,3}=(-1)^4\cdot\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{2}{3}a_{1,3}$ より

$$\int_{\pi}^{0}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta=-\frac{1}{4}a_{1,1}+\frac{1}{4}a_{1,3}-\frac{1}{4}\left(-b_{2,3}\right)-\frac{3}{4}\left(-3b_{2,1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{2}{3}a_{1,3}\right)+\frac{1}{2}\left(\pi^2+2a_{1,1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2+\frac{3}{4}a_{1,1}+\frac{7}{12}a_{1,3}+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{2}{3}a_{1,3}\right)+\frac{9}{4}\left(\pi^2+2a_{1,1}\right)$$

$$=3\pi^2+\frac{21}{4}a_{1,1}+\frac{3}{4}a_{1,3}$$

$$=3\pi^2+\frac{21}{4}(-2)+\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$=3\pi^2-\frac{32}{3}$$

よって $V=\dfrac{2}{3}\pi^4+\pi\left(3\pi^2-\dfrac{32}{3}\right)-\dfrac{4}{3}\pi$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+3\pi^2-12\pi$$