[東京工業大学 2000 年後期 $\boxed{2}$]

(1) $m \geqq 0,\ n \geqq 1$ である整数 $m,\ n$ にたいし，

$$a_{m,\,n} = \int_0^{\pi} \theta^m \cos n\theta\, d\theta\ ,\ b_{m,\,n} = \int_0^{\pi} \theta^m \sin n\theta\, d\theta$$

とおくとき，次の式を示せ。

$$a_{m+1,\,n} = -\frac{m+1}{n} b_{m,\,n}\ ,\ \ b_{m+1,\,n} = (-1)^{n+1}\frac{\pi^{m+1}}{n} + \frac{m+1}{n} a_{m,\,n}$$

(2) 半径 1 の球面上の定点を端点とする長さ π のひもを考える。

このひもが球の外側の空間を動くとき，ひもの通過しうる領域の体積を求めよ。

---

(1) $a_{m+1,\,n} = \int_0^{\pi} \theta^{m+1} \cos n\theta\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \theta^{m+1} \left(\frac{\sin n\theta}{n}\right)' d\theta$$

$$= \left[\theta^{m+1} \cdot \frac{\sin n\theta}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{m+1}{n}\int_0^{\pi} \theta^m \sin n\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{m+1}{n} b_{m,\,n}$$

$b_{m+1,\,n} = \int_0^{\pi} \theta^{m+1} \sin n\theta\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \theta^{m+1} \left(-\frac{\cos n\theta}{n}\right)' d\theta$$

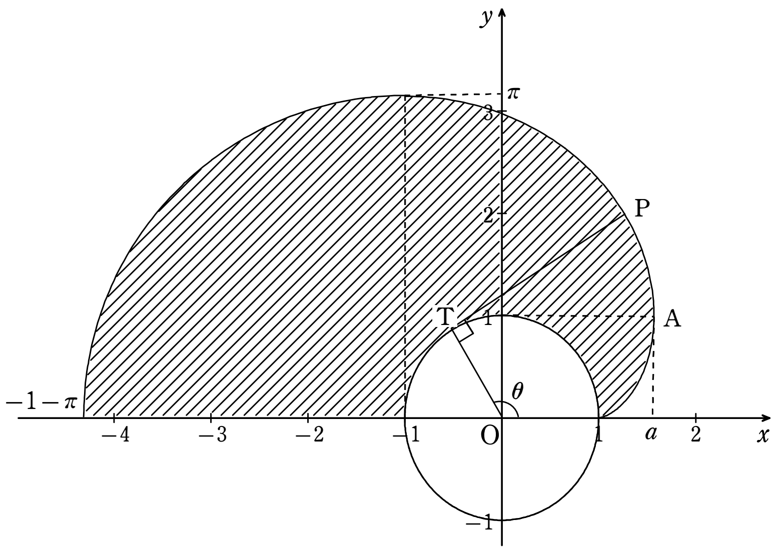
$$= \left[\theta^{m+1} \cdot \left(-\frac{\cos n\theta}{n}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{m+1}{n}\int_0^{\pi} \theta^m \cos n\theta\, d\theta$$

$$= \pi^{m+1}\left(-\frac{\cos n\pi}{n}\right) + \frac{m+1}{n} a_{m,\,n}$$

n が偶数のとき $\cos n\pi = 1$， n が奇数のとき $\cos n\pi = -1$ なので

$$b_{m+1,\,n} = (-1)^{n+1}\frac{\pi^{m+1}}{n} + \frac{m+1}{n} a_{m,\,n}$$

(2) 図のように長さ π のひもの端点を $(-1, 0)$ に固定し，ひもをたるむことなく伸ばしたときのもう一方の端点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする。円と伸開線との接点を T とし，$\angle \mathrm{TO}x=\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする。



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ なので

$x=\cos\theta+\theta\sin\theta$，$y=\sin\theta-\theta\cos\theta$ と媒介変数表示できる。

図の斜線部分を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V が求めるものである。

図のように曲線上の $x=a$ である点 A に対応する θ を θ_a とし，

曲線の $0\leqq\theta\leqq\theta_a$ に対応する部分を y_-，$\theta_a\leqq\theta\leqq\pi$ に対応する部分を y_+ とすると

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\pi^3+\int_{-1}^{a}\pi {y_+}^2dx-\int_{1}^{a}\pi {y_-}^2dx-\frac{4}{3}\pi\cdot1^3$$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+\pi\int_{\pi}^{\theta_a}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\pi\int_{0}^{\theta_a}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+\pi\int_{\pi}^{\theta_a}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta+\pi\int_{\theta_a}^{0}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+\pi\int_{\pi}^{0}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{4}{3}\pi$$

ここで，右辺第 2 項について

$$\int_{\pi}^{0}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2(-\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}(\sin^2\theta-2\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\cos^2\theta)(-\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}(-\theta\sin^2\theta\cos\theta+2\theta^2\sin\theta\cos^2\theta-\theta^3\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta+2\theta^2\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)-\theta^3\cos^3\theta\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\theta\cos\theta+\theta\cos^3\theta+2\theta^2\sin\theta-2\theta^2\sin^3\theta-\theta^3\cos^3\theta\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\theta\cos\theta+\theta\cdot\frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)+2\theta^2\sin\theta-2\theta^2\cdot\frac{1}{4}\left(-\sin 3\theta+3\sin\theta\right)-\theta^3\cdot\frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\frac{\theta\cos\theta}{4}+\frac{\theta\cos 3\theta}{4}-\frac{\theta^3\cos\theta}{4}-\frac{3\theta^3\cos 3\theta}{4}+\frac{\theta^2\sin\theta}{2}+\frac{\theta^2\sin 3\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}a_{1,1}+\frac{1}{4}a_{1,3}-\frac{1}{4}a_{3,3}-\frac{3}{4}a_{3,1}+\frac{1}{2}b_{2,3}+\frac{1}{2}b_{2,1}$$

となる。

$$a_{1,1}=\int_0^{\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=-2$$

$$a_{1,3}=\int_0^{\pi}\theta\cos 3\theta\,d\theta=\left[\theta\cdot\frac{1}{3}\sin 3\theta\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin 3\theta\,d\theta=-\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{9}$$

であることと，$b_{2,1}=(-1)^2\cdot\dfrac{\pi^2}{1}+\dfrac{2}{1}a_{1,1}$，$b_{2,3}=(-1)^4\cdot\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{2}{3}a_{1,3}$ より

$$\int_{\pi}^{0}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta=-\frac{1}{4}a_{1,1}+\frac{1}{4}a_{1,3}-\frac{1}{4}\left(-b_{2,3}\right)-\frac{3}{4}\left(-3b_{2,1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{2}{3}a_{1,3}\right)+\frac{1}{2}\left(\pi^2+2a_{1,1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2+\frac{3}{4}a_{1,1}+\frac{7}{12}a_{1,3}+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{2}{3}a_{1,3}\right)+\frac{9}{4}\left(\pi^2+2a_{1,1}\right)$$

$$=3\pi^2+\frac{21}{4}a_{1,1}+\frac{3}{4}a_{1,3}$$

$$=3\pi^2+\frac{21}{4}(-2)+\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$=3\pi^2-\frac{32}{3}$$

よって $V=\dfrac{2}{3}\pi^4+\pi\left(3\pi^2-\dfrac{32}{3}\right)-\dfrac{4}{3}\pi$

$$=\frac{2}{3}\pi^4+3\pi^2-12\pi$$