［ 東京工業大学 2000 年後期 $\boxed{1}$ ］

☆―――☆

実数$a,\ b$に対し $f(x)=x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab$ とおく。

(1) $f(x)$を因数分解せよ、

(2) すべての $x \geqq 0$ に対し $f(x) \geqq 0$ が成り立つための$a,\ b$の条件を求め，それを満たす点$(a,\ b)$の存在する範囲を図示せよ。

☆―――☆

(1) $f(x)=x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab$

$=(x+a)\{x^2-(a-1)x+b\}$

(2)（ｉ）$a \geqq 0$ のとき

$x \geqq 0$ のとき $x+a \geqq 0$（等号成立は $x=a=0$ のとき）であるから

すべての $x \geqq 0$ に対し，$x^2-(a-1)x+b \geqq 0$ となる条件を求めればよい。

$g(x)=x^2-(a-1)x+b \ =\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-\dfrac{(a-1)^2}{4}+b$ とおくと

（ｉ－A) $\dfrac{a-1}{2} \leqq 0$ すなわち$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$g(0)=b \geqq 0$

（ｉ－B) $\dfrac{a-1}{2}>0$ すなわち $a>1$ のとき

$g\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=-\dfrac{(a-1)^2}{4}+b \geqq 0$

となればよい。

（ⅱ）$a<0$ のとき

(1)の結果より $x=-a>0$ において $f(-a)=0$ であるから

$g(-a)=0$ でなければならない。

よって $g(-a)=a^2-(a-1)(-a)+b=2a^2-a+b=0$ より

$b=-2a^2+a=-2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$

このとき，$f(x)=(x+a)^2\{x-(2a-1)\}$ となり，$2a-1<0$ であるから

$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ を満たしている。

(ⅰ), (ⅱ)より求める a, b の条件は

「$0 \leqq a \leqq 1$ かつ $b \geqq 0$」

または「$a > 1$ かつ $b \geqq \dfrac{(a-1)^2}{4}$」

または「$a < 0$ かつ $b = -2\left(a - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{8}$」

となり，点 (a, b) の存在範囲を図示すると次の図の斜線部分と実線部分である。

ただし，境界上の点はすべて含む。