[東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

$(x,\ y)$ 平面において半円：$x^2+y^2=1,\ y \geqq 0$ の内側が鏡になっているとする。

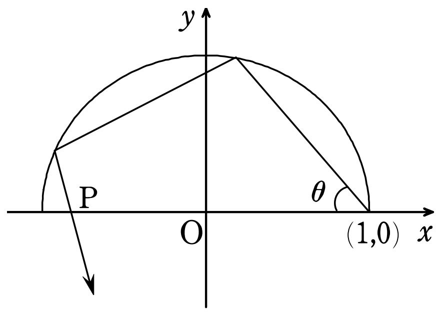
図のように，定点 $(1,\ 0)$ より x 軸となす角 θ で光線が発射され，

2 回半円に反射したのち，x 軸上の点 P を通過したとする。

(1) このような状況が起こるための θ の範囲を求めよ。

(2) P の座標を θ を用いて表せ。

(3) θ が(1)の範囲を動くときの P の動く範囲を求めよ。



☆ ☆

(1) A(1, 0) とし，1 回目，2 回目の反射点をそれぞれ B，C とする。

直線 CP と円 $x^2+y^2=1$ との交点を D とすると

$\angle\mathrm{AOC}=2(\pi-2\theta)$

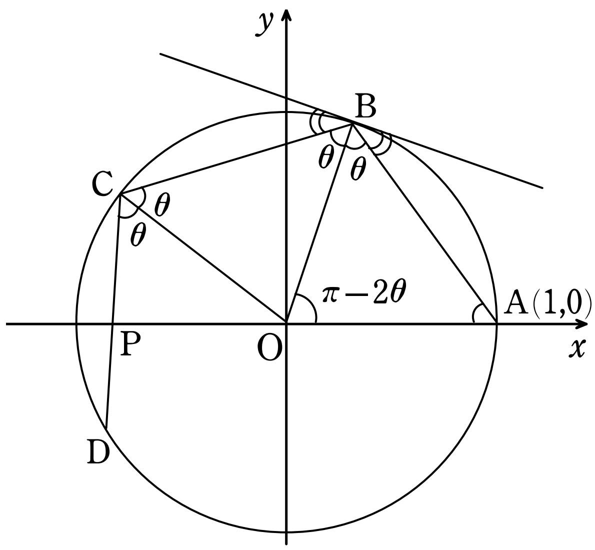
$\angle\mathrm{AOD}=3(\pi-2\theta)$

であり，題意のような状況が起こるのは

$\angle\mathrm{AOC}<\pi<\angle\mathrm{AOD}$ のときなので

$2(\pi-2\theta)<\pi<3(\pi-2\theta)$ から

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$



(2) $\angle\mathrm{OCP}=\theta,\ \angle\mathrm{OPC}=2(\pi-2\theta)-\theta=2\pi-5\theta$ であるから

△OCP に正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{OC}}{\sin(2\pi-5\theta)} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta}=\frac{1}{-\sin 5\theta} \Leftrightarrow \mathrm{OP}=-\frac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$$

$-\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}>0$ であり，P の x 座標は負であるから $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta},\ 0\right)$

(3) $$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(2\theta+3\theta)}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin 2\theta\cos 3\theta+\cos 2\theta\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+(2\cos^2\theta-1)(3\sin\theta-4\sin^3\theta)}{\sin\theta}$$

$$=2\cos\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+(2\cos^2\theta-1)(3-4\sin^2\theta)$$

$$=8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+(2\cos^2\theta-1)(4\cos^2\theta-1)$$

$$=8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+1$$

$$=16\cos^4\theta-12\cos^2\theta+1$$

$$=16\left(\cos^2\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{5}{4}$$

ここで，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\dfrac{1}{2}<\cos\theta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<\dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{2}{8}<\cos^2\theta<\dfrac{4}{8}$ であるので，

$-\dfrac{5}{4}\leqq\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}<-1$ となる。

よって $-1<\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}\leqq-\dfrac{4}{5}$ から

P の動く範囲は $-1<x\leqq-\dfrac{4}{5}$，$y=0$

[東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{2}$]

(1) 極座標表示された複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。

(2) n を自然数とするとき，$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2$ を $r,\ \theta,\ n$ を用いて表せ。

(3) 複素数 z が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすならば，すべての自然数 n に対し $\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$ が成り立つことを示せ。

---

(1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2} \iff \left|r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$$

$$\iff \left|r\cos\theta+\frac{1}{2}+ir\sin\theta\right|<\frac{1}{2}$$

$$\iff \left(r\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+(r\sin\theta)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff r^2+r\cos\theta<0$$

$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ より $r\neq 0$ なので $r+\cos\theta<0$

(2) (ⅰ) $z\neq 1$ のとき

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|^2$$

$$=\left|\frac{1-\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{n+1}}{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|^2$$

$$=\left|\frac{1-r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}\right|^2$$

$$=\left|\frac{\{1-r^{n+1}\cos(n+1)\theta\}+ir^{n+1}\sin(n+1)\theta}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}\right|^2$$

$$=\left|\frac{1-r^{n+1}\cos(n+1)\theta+i\,r^{n+1}\sin(n+1)\theta}{(1-r\cos\theta)-i\,r\sin\theta}\right|^2$$

$$=\frac{\{1-r^{n+1}\cos(n+1)\theta\}^2+\{r^{n+1}\sin(n+1)\theta\}^2}{(1-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{1-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{2n+2}}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

(ⅱ) $z=1$のとき

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|n+1\right|^2$$

$$=(n+1)^2$$

(3) $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ のとき，(1)より $0<r<-\cos\theta\leqq 1$ であり， $z\neq 1$， $\left|\cos(n+1)\theta\right|\leqq 1$ なので

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\frac{1-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{2n+2}}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$$=\frac{1+2r^{n+1}\{-\cos(n+1)\theta\}+r^{2n+2}}{1+2r(-\cos\theta)+r^2}$$

$$<\frac{1+2r^{n+1}\cdot 1+r\cdot r^{n+1}}{1+2r\cdot r+r^2}$$

$$<\frac{1+2r^{n+1}+1\cdot r^{n+1}}{1+2r^2+r^2}$$

$$=\frac{1+3r^{n+1}}{1+3r^2}$$

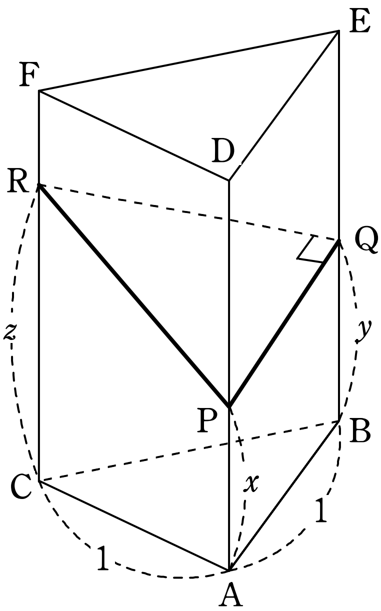
$$\leqq\frac{1+3r^2}{1+3r^2}$$

$$=1$$

よって $\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$

[東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{3}$]

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り，その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。



正三角柱の各頂点を右図のように定める。

三角柱を条件を満たすように切ったとき，

平面と辺 AD, BE, CF との交点をそれぞれ P, Q, R とする。

正三角柱であるから，$\angle \mathrm{PQR}=90^\circ$ としても一般性を失わない。

このとき，$\mathrm{AP}=x,\ \mathrm{BQ}=y,\ \mathrm{CR}=z$ とし，

$$\begin{cases} y=y-x \\ v=z-y \end{cases}$$

とおくと，$|u|\leqq 2,\ |v|\leqq 2$ であり

$$\begin{cases} \mathrm{PQ}^2=1+u^2 & \cdots ① \\ \mathrm{QR}^2=1+v^2 & \cdots ② \\ \mathrm{RP}^2=1+(u+v)^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

$\mathrm{RP}^2=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$ より $1+(u+v)^2=(1+u^2)+(1+v^2)$ から $2uv=1\ \cdots ④$

また，$|u+v|=|z-x|\leqq 2$ であるから，

④より $\left|u+\dfrac{1}{2u}\right|\leqq 2 \iff 2|u|^2-4|u|+1\leqq 0$

$$\iff \frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqq |u|\leqq \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\leqq u^2\leqq \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

△PQR の面積を S とすると

$$S^2=\frac{1}{4}\mathrm{PQ}^2\cdot\mathrm{QR}^2$$

$$=\frac{1}{4}(1+u^2)\left(1+\frac{1}{4u^2}\right)$$

ここで，$X=u^2$ とおき，$f(X)=(1+X)\left(1+\dfrac{1}{4X}\right)$ とすると

$f'(X)=1-\dfrac{1}{4X^2}$ より $f(X)$ の増減は下表に従う。

X	$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$
$f'(X)$		$-$	0	$+$	
$f(X)$	$\dfrac{17}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{9}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{17}{4}$

したがって $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{9}{4}\leqq S^2\leqq\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{17}{4}$ より $\dfrac{3}{4}\leqq S\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

[東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{4}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

n は 2 以上の自然数とする。関数 $y=e^x$ ……(ア), $y=e^{nx}-1$ ……(イ)について以下の問いに答えよ。

(1) (ア)と(イ)のグラフは第 1 象限においてただひとつの交点を持つことを示せ。

(2) (1)で得られた交点の座標を $(a_n,\ b_n)$ としたとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

(3) 第 1 象限内で(ア)と(イ)のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき $\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 2 曲線(ア), (イ)の交点の x 座標は $e^{nx}-1=e^x$ すなわち $e^{nx}-e^x-1=0$ の実数解として得られる。

$f(x)=e^{nx}-e^x-1$ とおき， $y=f(x)$ と x 軸との位置関係を調べる。

$x<0$ のとき， $0<e^{nx}<1,\ 0<e^x<1$ であるから $f(x)<0$ であり

$f(x)=0$ は $x<0$ においては解をもたない。

$$f'(x)=ne^{nx}-e^x$$
$$=e^x(ne^{(n-1)x}-1)\quad (n\geqq 2) \text{ より}$$

$x\geqq 0$ のとき $ne^{(n-1)x}-1\geqq ne^{(n-1)0}-1=n-1\geqq 1$ なので $f'(x)>0$ となり

$f(x)$ は単調増加である。

$f(0)=-1$ と $n\geqq 2,\ e>2$ より $f(1)=e^n-e-1=e(e^{n-1}-1)-1\geqq e(e-1)-1>0$

であることから $f(x)=0$ は $0<x<1$ にただひとつの解をもつ。よって題意は示された。

(2) (1)より $f(a_n)=e^{na_n}-e^{a_n}-1=0$ であり $e^{na_n}=e^{a_n}+1$ …①

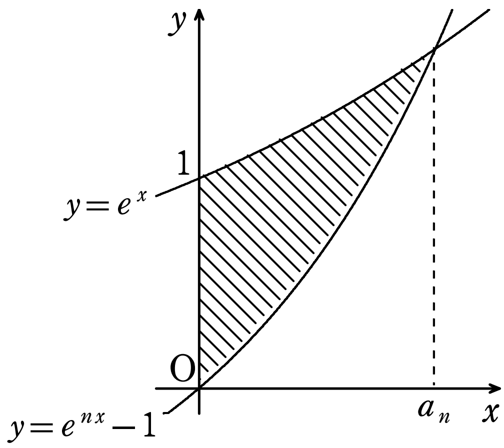
$$\begin{aligned}
0<a_n<1 &\iff 1<e^{a_n}<e \\
&\iff 2<e^{a_n}+1<e+1 \\
\text{①より} &\iff 2<e^{na_n}<e+1 \\
&\iff \log 2<na_n<\log(e+1) \\
&\iff \frac{\log 2}{n}<a_n<\frac{\log(e+1)}{n} \text{ となる。}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log 2}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log(e+1)}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

また，$e^{na_n}=e^{a_n}+1$ より $na_n=\log(e^{a_n}+1)$ であるから

$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\log(e^{a_n}+1)=\log(e^0+1)=\log 2$ となる。

(3) S_n は右図の斜線部分の面積であるから



$$S_n=\int_0^{a_n}\{e^x-(e^{nx}-1)\}\,dx$$

$$=\left[e^x-\frac{e^{nx}}{n}+x\right]_0^{a_n}$$

$$=e^{a_n}-\frac{e^{na_n}}{n}+a_n-1+\frac{1}{n}$$

よって

$nS_n=n(e^{a_n}-1)-e^{na_n}+na_n+1$ である。

ここで，$\lim_{n\to\infty}n(e^{a_n}-1)=\lim_{n\to\infty}\left\{na_n\cdot\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\}$ であり

$g(x)=e^x$ とすれば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}=\lim_{a_n\to 0}\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}=g'(0)=e^0=1$ から

$\lim_{n\to\infty}n(e^{a_n}-1)=\lim_{n\to\infty}\left\{na_n\cdot\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\}=(\log 2)\cdot 1=\log 2$

さらに，$\lim_{n\to\infty}(-e^{na_n}+na_n+1)=-e^{\log 2}+\log 2+1=-2+\log 2+1=\log 2-1$

したがって $\lim_{n\to\infty}nS_n=\log 2+\log 2-1=2\log 2-1$