

[東京工業大学 2000 年 前期 1]



(x, y) 平面において半円 $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ の内側が鏡になっているとする。

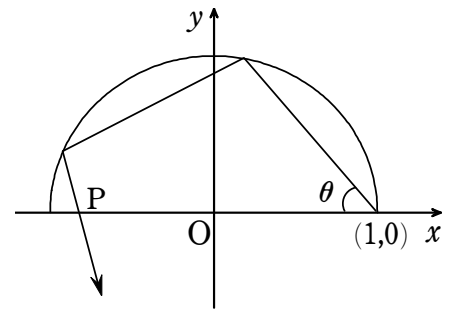
図のように、定点 $(1, 0)$ より x 軸となす角 θ で光線が発射され、

2 回半円に反射したのち、 x 軸上の点 P を通過したとする。

(1) このような状況が起こるための θ の範囲を求めよ。

(2) P の座標を θ を用いて表せ。

(3) θ が(1)の範囲を動くときの P の動く範囲を求めよ。





(1) 極座標表示された複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ を満たすための必要十分条件

を r と θ を用いて表せ。

(2) n を自然数とするとき, $|1 + z + \dots + z^n|^2$ を r, θ, n を用いて表せ。

(3) 複素数 z が $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ を満たすならば, すべての自然数 n に対し $|1 + z + \dots + z^n| < 1$ が成

り立つことを示せ。



[東京工業大学 2000 年 前期 3]



1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り、その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。





n は 2 以上の自然数とする。関数 $y = e^x$ (ア) , $y = e^{nx} - 1$ (イ) について以下の問いに答えよ。

(1) (ア)と(イ)のグラフは第 1 象限においてただひとつの交点を持つことを示せ。

(2) (1)で得られた交点の座標を (a_n, b_n) としたとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。

(3) 第 1 象限内で(ア)と(イ)のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$

を求めよ。

