[東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{4}$]

☆――――――――――――――――――――――――☆

n は 2 以上の自然数とする。関数 $y=e^x$ ……(ア), $y=e^{nx}-1$ ……(イ)について以下の問いに答えよ。

(1) (ア)と(イ)のグラフは第 1 象限においてただひとつの交点を持つことを示せ。

(2) (1)で得られた交点の座標を $(a_n,\ b_n)$ としたとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

(3) 第 1 象限内で(ア)と(イ)のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき $\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――☆

(1) 2 曲線(ア), (イ)の交点の x 座標は $e^{nx}-1=e^x$ すなわち $e^{nx}-e^x-1=0$ の実数解として得られる。

$f(x)=e^{nx}-e^x-1$ とおき, $y=f(x)$ と x 軸との位置関係を調べる。

$x<0$ のとき, $0<e^{nx}<1,\ 0<e^x<1$ であるから $f(x)<0$ であり

$f(x)=0$ は $x<0$ においては解をもたない。

$$f'(x)=ne^{nx}-e^x$$

$$=e^x(ne^{(n-1)x}-1)\quad (n\geqq 2)\ \text{より}$$

$x\geqq 0$ のとき $ne^{(n-1)x}-1\geqq ne^{(n-1)0}-1=n-1\geqq 1$ なので $f'(x)>0$ となり

$f(x)$ は単調増加である。

$f(0)=-1$ と $n\geqq 2,\ e>2$ より $f(1)=e^n-e-1=e(e^{n-1}-1)-1\geqq e(e-1)-1>0$

であることから $f(x)=0$ は $0<x<1$ にただひとつの解をもつ。よって題意は示された。

(2) (1)より $f(a_n)=e^{na_n}-e^{a_n}-1=0$ であり $e^{na_n}=e^{a_n}+1$ …①

$0<a_n<1 \iff 1<e^{a_n}<e$

$\iff 2<e^{a_n}+1<e+1$

①より $\iff 2<e^{na_n}<e+1$

$\iff \log 2<na_n<\log(e+1)$

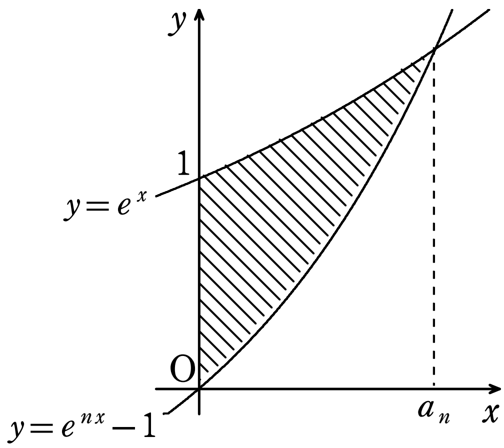
$\iff \dfrac{\log 2}{n}<a_n<\dfrac{\log(e+1)}{n}$ となる。

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log 2}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log(e+1)}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

また，$e^{na_n}=e^{a_n}+1$ より $na_n=\log(e^{a_n}+1)$ であるから

$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\log(e^{a_n}+1)=\log(e^0+1)=\log 2$ となる。

(3) S_n は右図の斜線部分の面積であるから



$$S_n=\int_0^{a_n}\{e^x-(e^{nx}-1)\}\,dx$$

$$=\left[e^x-\frac{e^{nx}}{n}+x\right]_0^{a_n}$$

$$=e^{a_n}-\frac{e^{na_n}}{n}+a_n-1+\frac{1}{n}$$

よって

$nS_n=n(e^{a_n}-1)-e^{na_n}+na_n+1$ である。

ここで，$\lim_{n\to\infty}n(e^{a_n}-1)=\lim_{n\to\infty}\left\{na_n\cdot\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\}$ であり

$g(x)=e^x$ とすれば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}=\lim_{a_n\to 0}\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}=g'(0)=e^0=1$ から

$\lim_{n\to\infty}n(e^{a_n}-1)=\lim_{n\to\infty}\left\{na_n\cdot\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\}=\left(\log 2\right)\cdot 1=\log 2$

さらに，$\lim_{n\to\infty}(-e^{na_n}+na_n+1)=-e^{\log 2}+\log 2+1=-2+\log 2+1=\log 2-1$

したがって $\lim_{n\to\infty}nS_n=\log 2+\log 2-1=2\log 2-1$