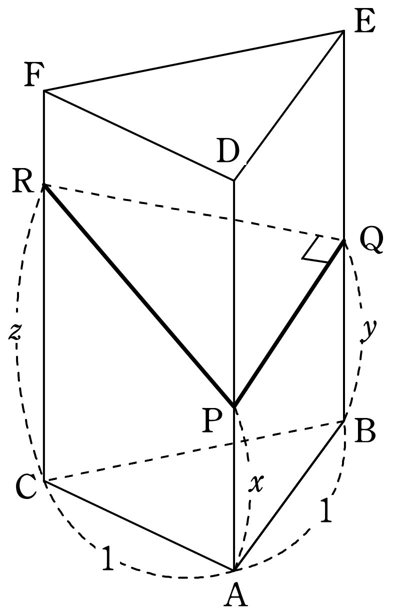
[東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{3}$]

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り，その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。

正三角柱の各頂点を右図のように定める。



三角柱を条件を満たすように切ったとき，

平面と辺 AD, BE, CF との交点をそれぞれ P, Q, R とする。

正三角柱であるから，$\angle \mathrm{PQR}=90^\circ$ としても一般性を失わない。

このとき，$\mathrm{AP}=x,\ \mathrm{BQ}=y,\ \mathrm{CR}=z$ とし，

$$\begin{cases} y=y-x \\ v=z-y \end{cases}$$

とおくと，$|u|\leqq 2,\ |v|\leqq 2$ であり

$$\begin{cases} \mathrm{PQ}^2=1+u^2 & \cdots① \\ \mathrm{QR}^2=1+v^2 & \cdots② \\ \mathrm{RP}^2=1+(u+v)^2 & \cdots③ \end{cases}$$

$\mathrm{RP}^2=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$ より $1+(u+v)^2=(1+u^2)+(1+v^2)$ から $2uv=1\ \cdots④$

また，$|u+v|=|z-x|\leqq 2$ であるから，

④より $\left|u+\dfrac{1}{2u}\right|\leqq 2 \iff 2|u|^2-4|u|+1\leqq 0$

$$\iff \frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqq |u|\leqq \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\leqq u^2\leqq \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

△PQR の面積を S とすると

$$S^2=\frac{1}{4}\mathrm{PQ}^2\cdot\mathrm{QR}^2$$

$$=\frac{1}{4}(1+u^2)\left(1+\frac{1}{4u^2}\right)$$

ここで， $X=u^2$ とおき， $f(X)=(1+X)\left(1+\dfrac{1}{4X}\right)$ とすると

$f'(X)=1-\dfrac{1}{4X^2}$ より $f(X)$ の増減は下表に従う。

X	$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$
$f'(X)$		$-$	0	$+$	
$f(X)$	$\dfrac{17}{4}$	↘	$\dfrac{9}{4}$	↗	$\dfrac{17}{4}$

したがって $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{9}{4}\leqq S^2\leqq\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{17}{4}$ より $\dfrac{3}{4}\leqq S\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{4}$