［ 東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{2}$ ］

(1) 極座標表示された複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。

(2) n を自然数とするとき，$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2$ を $r,\ \theta,\ n$ を用いて表せ。

(3) 複素数 z が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすならば，すべての自然数 n に対し $\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$ が成り立つことを示せ。

---

(1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2} \iff \left|r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$$

$$\iff \left|r\cos\theta+\frac{1}{2}+ir\sin\theta\right|<\frac{1}{2}$$

$$\iff \left(r\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+(r\sin\theta)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff r^2+r\cos\theta<0$$

$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ より $r\neq 0$ なので $r+\cos\theta<0$

(2) (ｉ) $z\neq 1$ のとき

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|^2$$

$$=\left|\frac{1-\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{n+1}}{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|^2$$

$$=\left|\frac{1-r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}\right|^2$$

$$=\left|\frac{\{1-r^{n+1}\cos(n+1)\theta\}+ir^{n+1}\sin(n+1)\theta}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}\right|^2$$

$$=\left|\frac{1-r^{n+1}\cos(n+1)\theta+i\,r^{n+1}\sin(n+1)\theta}{(1-r\cos\theta)-i\,r\sin\theta}\right|^2$$

$$=\frac{\{1-r^{n+1}\cos(n+1)\theta\}^2+\{r^{n+1}\sin(n+1)\theta\}^2}{(1-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{1-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{2n+2}}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

(ii) $z=1$のとき

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|n+1\right|^2$$

$$=(n+1)^2$$

(3) $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ のとき，(1)より $0<r<-\cos\theta\leqq 1$ であり， $z\neq 1$， $\left|\cos(n+1)\theta\right|\leqq 1$ なので

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\frac{1-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{2n+2}}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$$=\frac{1+2r^{n+1}\{-\cos(n+1)\theta\}+r^{2n+2}}{1+2r(-\cos\theta)+r^2}$$

$$<\frac{1+2r^{n+1}\cdot 1+r\cdot r^{n+1}}{1+2r\cdot r+r^2}$$

$$<\frac{1+2r^{n+1}+1\cdot r^{n+1}}{1+2r^2+r^2}$$

$$=\frac{1+3r^{n+1}}{1+3r^2}$$

$$\leqq\frac{1+3r^2}{1+3r^2}$$

$$=1$$

よって $\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$