［ 東京工業大学 2000 年 前期 $\boxed{1}$ ］

(x, y) 平面において半円：$x^2+y^2=1,\ y \geqq 0$ の内側が鏡になっているとする。

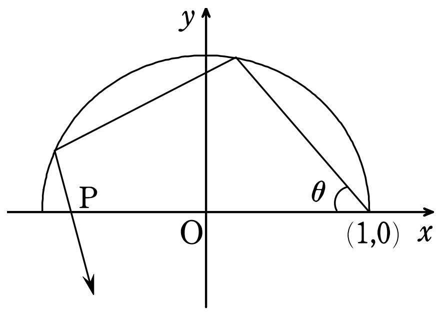
図のように，定点 $(1, 0)$ より x 軸となす角 θ で光線が発射され，

2 回半円に反射したのち，x 軸上の点 P を通過したとする。

(1) このような状況が起こるための θ の範囲を求めよ。

(2) P の座標を θ を用いて表せ。

(3) θ が(1)の範囲を動くときの P の動く範囲を求めよ。



(1) A$(1, 0)$ とし，1 回目，2 回目の反射点をそれぞれ B，C とする。

直線 CP と円 $x^2+y^2=1$ との交点を D とすると

$\angle\mathrm{AOC}=2(\pi-2\theta)$

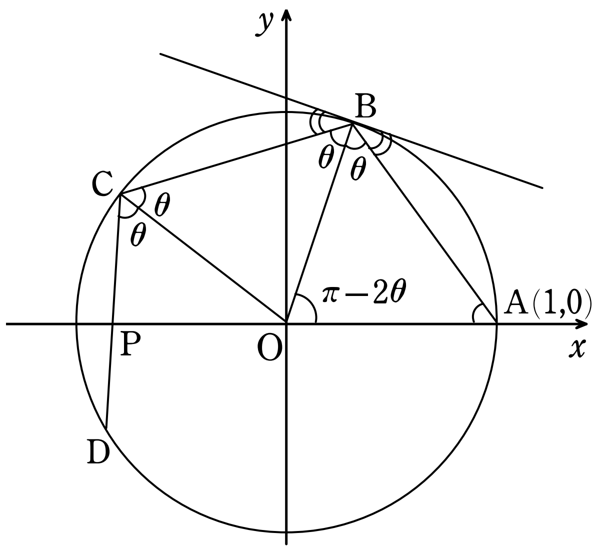
$\angle\mathrm{AOD}=3(\pi-2\theta)$

であり，題意のような状況が起こるのは

$\angle\mathrm{AOC}<\pi<\angle\mathrm{AOD}$ のときなので

$2(\pi-2\theta)<\pi<3(\pi-2\theta)$ から

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$



(2) $\angle\mathrm{OCP}=\theta,\ \angle\mathrm{OPC}=2(\pi-2\theta)-\theta=2\pi-5\theta$ であるから

△OCP に正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{OC}}{\sin(2\pi-5\theta)} \iff \frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta}=\frac{1}{-\sin 5\theta} \iff \mathrm{OP}=-\frac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$$

$-\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}>0$ であり，P の x 座標は負であるから P$\left(\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta},\ 0\right)$

(3) $\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin(2\theta+3\theta)}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin 2\theta\cos 3\theta+\cos 2\theta\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+(2\cos^2\theta-1)(3\sin\theta-4\sin^3\theta)}{\sin\theta}$$

$$=2\cos\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+(2\cos^2\theta-1)(3-4\sin^2\theta)$$

$$=8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+(2\cos^2\theta-1)(4\cos^2\theta-1)$$

$$=8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+1$$

$$=16\cos^4\theta-12\cos^2\theta+1$$

$$=16\left(\cos^2\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{5}{4}$$

ここで，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\dfrac{1}{2}<\cos\theta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<\dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{2}{8}<\cos^2\theta<\dfrac{4}{8}$ であるので，

$-\dfrac{5}{4}\leqq\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}<-1$ となる。

よって $-1<\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}\leqq-\dfrac{4}{5}$ から

P の動く範囲は $-1<x\leqq-\dfrac{4}{5}$，$y=0$