[東京工業大学 1999 年後期 $\boxed{1}$]

極限値 $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{1+x}dx$ を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{1+x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-\cos 2nx}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx}{1+x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log(1+x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx}{1+x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx}{1+x}dx$$

ここで，右辺の第 2 項について

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx}{1+x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x}\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)' dx$$

$$= \left[\frac{1}{1+x}\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx$$

であり，$|\sin 2nx| \leqq 1$ なので

$$\left|\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx\right| \leqq \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2nx|}{(1+x)^2}dx \leqq \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2n}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n}\left(-\frac{2}{2+\pi}+1\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2+\pi}\right)$$

となる。

よって，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2+\pi}\right) = 0$ なので，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx}{1+x}dx = 0$ となる。

したがって $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{1+x}dx = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$

［ 東京工業大学 1999 年後期 $\boxed{2}$ ］

(1) 半径 1 の円に内接する 6 個の半径の等しい円を図 1 のように描く，さらに図 2 のように 6 個の小さな半径の等しい円を描く，この操作を無限にくり返したとき，6 個ずつ次々に描かれる円の面積の総和 S_2 と，それらの円の円周の長さの総和 C_2 を求めよ。

(2) (1)で 6 個の円を次々に描いていった。一般に $n \geqq 2$ に対して $3n$ 個の円を用いて同様の操作を行うとき，描かれる円の面積の総和 S_n と，それらの円の円周の長さの総和 C_n を求めよ。

(3) 数列 $S_2, S_3, S_4, \cdots$ の極限値を求めよ。

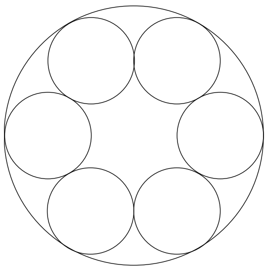


図 1

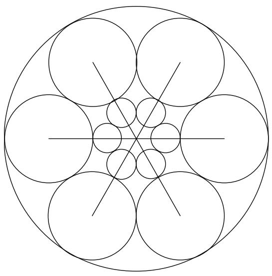


図 2

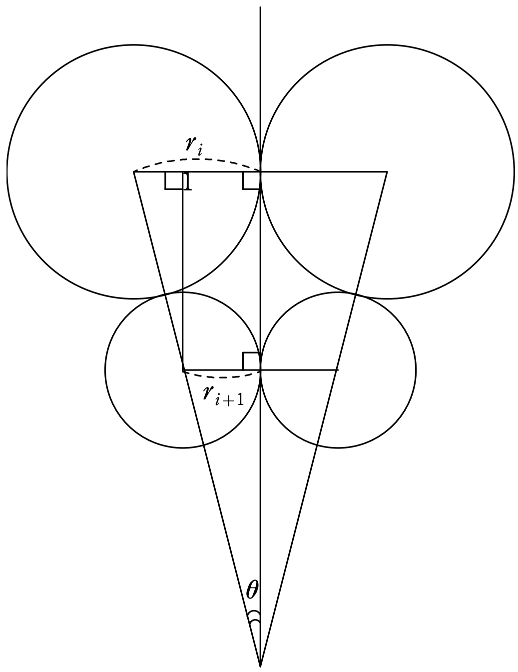
(1) i 回目の操作で得られる円の半径を r_i とする。

$r_1 = (1-r_1)\sin\dfrac{\pi}{6}$ より $r_1 = \dfrac{1}{3}$

また，半径1の円の中心を O とし，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ とおくと

$$r_i - r_{i+1} = (r_i + r_{i+1})\sin\theta \iff r_{i+1} = \frac{1}{3}r_i$$

したがって $r_i = r_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{i-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^i$ を得る。



よって $S_2 = 6\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\pi r_i^2 = 6\pi\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^i = 6\pi\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}\pi$

$$C_2 = 6\sum_{i=1}^{\infty}2\pi r_i = 12\pi\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = 12\pi\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 6\pi$$

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3n}$ とする。

$r_1=(1-r_1)\sin\theta$ より $r_1=\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

また，(1)と同様にして $r_{i+1}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_i$

$k=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ とおくと， $r_i=r_1k^{i-1}$ となる。

$|k|<1$ であるから

$$S_n=3n\sum_{i=1}^{\infty}\pi r_i^2=3n\pi\sum_{i=1}^{\infty}(k^2)^{i-1}r_1^2=3n\pi\cdot\frac{r_1^2}{1-k^2}$$

$$=3n\pi\cdot\frac{\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=3n\pi\cdot\frac{\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}=\frac{3n\pi}{4}\sin\theta=\frac{3n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3n}$$

$$C_n=3n\sum_{i=1}^{\infty}2\pi r_i=6n\pi\sum_{i=1}^{\infty}r_1k^{i-1}=6n\pi\cdot\frac{r_1}{1-k}=6n\pi\cdot\frac{\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)}=3n\pi$$

となる。

(3) (2)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{3n}}{\dfrac{\pi}{3n}}\cdot\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}$

となる。