

[東京工業大学 1999 年後期 2]



- (1) 半径 1 の円に内接する 6 個の半径の等しい円を図 1 のように描く, さらに図 2 のように 6 個の小さな半径の等しい円を描く, この操作を無限にくり返したとき, 6 個ずつ次々に描かれる円の面積の総和 S_2 と, それらの円の円周の長さの総和 C_2 を求めよ。
- (2) (1)で 6 個の円を次々に描いていった。一般に $n \geq 2$ に対して $3n$ 個の円を用いて同様の操作を行うとき, 描かれる円の面積の総和 S_n と, それらの円の円周の長さの総和 C_n を求めよ。
- (3) 数列 S_2, S_3, S_4, \dots の極限值を求めよ。

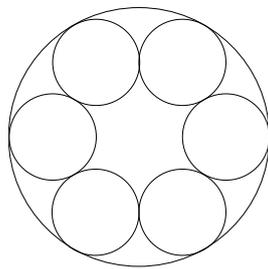


図 1

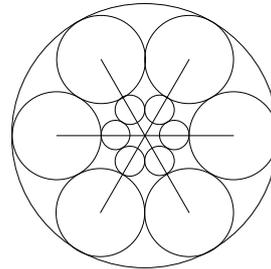


図 2



- (1) i 回目の操作で得られる円の半径を r_i とする。

$$r_1 = (1 - r_1) \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{より} \quad r_1 = \frac{1}{3}$$

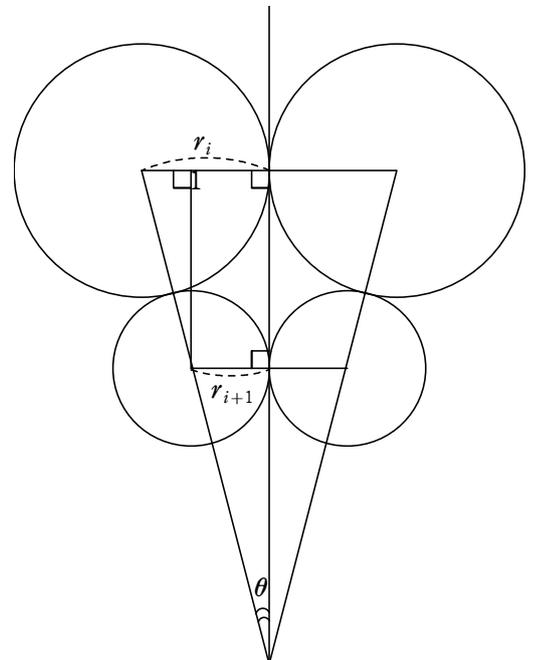
また, 半径 1 の円の中心を O とし, $\theta = \frac{\pi}{6}$ とおくと

$$r_i - r_{i+1} = (r_i + r_{i+1}) \sin \theta \Leftrightarrow r_{i+1} = \frac{1}{3} r_i$$

したがって $r_i = r_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^i$ を得る。

$$\text{よって} \quad S_2 = 6 \sum_{i=1}^{\infty} \pi r_i^2 = 6\pi \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^i = 6\pi \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \pi$$

$$C_2 = 6 \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi r_i = 12\pi \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = 12\pi \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 6\pi$$



(2) $\theta = \frac{\pi}{3n}$ とする。

$$r_1 = (1 - r_1) \sin \theta \quad \text{より} \quad r_1 = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

また, (1)と同様にして $r_{i+1} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} r_i$

$$k = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad \text{とおくと,} \quad r_i = r_1 k^{i-1} \quad \text{となる。}$$

$|k| < 1$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= 3n \sum_{i=1}^{\infty} \pi r_i^2 = 3n\pi \sum_{i=1}^{\infty} (k^2)^{i-1} r_1^2 = 3n\pi \cdot \frac{r_1^2}{1 - k^2} \\ &= 3n\pi \cdot \frac{\left(\frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2}{1 - \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2} = 3n\pi \cdot \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \sin \theta)^2 - (1 - \sin \theta)^2} = \frac{3n\pi}{4} \sin \theta = \frac{3n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3n} \end{aligned}$$

$$C_n = 3n \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi r_i = 6n\pi \sum_{i=1}^{\infty} r_1 k^{i-1} = 6n\pi \cdot \frac{r_1}{1 - k} = 6n\pi \cdot \frac{\frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}}{1 - \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)} = 3n\pi$$

となる。

$$(3) (2) \text{より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

となる。