[東京工業大学 1999 年後期 $\boxed{1}$]

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx$ を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-\cos 2nx}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log(1+x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}dx$$

ここで，右辺の第 2 項について

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x}\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)'dx$$

$$=\left[\frac{1}{1+x}\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx$$

であり，$|\sin 2nx|\leqq 1$ なので

$$\left|\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx\right|\leqq\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin 2nx|}{(1+x)^2}dx\leqq\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2n}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2n}\left(-\frac{2}{2+\pi}+1\right)=\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2+\pi}\right)$$

となる。

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2+\pi}\right)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}dx=0$ となる。

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$