[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{1}$]

☆────────────────────☆

正の実数 $a,\ b,\ p$ に対して

$$A=(a+b)^p \quad と \quad B=2^{p-1}(a^p+b^p)$$

の大小関係を調べよ。

☆────────────────────☆

$$\frac{A}{a^p}=\frac{(a+b)^p}{a^p}=\left(1+\frac{b}{a}\right)^p,\quad \frac{B}{a^p}=2^{p-1}\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p\right\} \quad であり$$

$\dfrac{b}{a}=x$ とおくと $\dfrac{A}{a^p}=\left(1+x\right)^p,\ \dfrac{B}{a^p}=2^{p-1}\left(1+x^p\right)$ となる。

a^p は正の実数であるから $A,\ B$ の大小関係を調べる代わりに，$\dfrac{A}{a^p},\ \dfrac{B}{a^p}$ の大小関係を調べても結果は同じである。

$p=1$ のときは $A=B$ である。

$p\neq 1$ のとき

$f(x)=\left(1+x\right)^p-2^{p-1}\left(1+x^p\right)$ とおく。

$f'(x)=p\left(1+x\right)^{p-1}-2^{p-1}px^{p-1}=p\left\{\left(1+x\right)^{p-1}-(2x)^{p-1}\right\}$ となる。

（i） $p>1$ のとき $f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のときで，$f(1)=0$， $p-1>0$ から

$f(x)$ の増減は次の通り。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	0	↘

よって $f(x)\leqq 0$ であるから $\dfrac{A}{a^p}\leqq\dfrac{B}{a^p}$ （等号成立は $x=1$ のとき）

（ii） $0<p<1$ のとき $f(1)=0$， $p-1<0$ から

$f(x)$ の増減は次の通り。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

よって　$f(x) \geqq 0$　であるから　$\dfrac{A}{a^p} \geqq \dfrac{B}{a^p}$　（等号成立は　$x=1$　のとき）

したがって　$p=1$のとき　$A=B$

$p>1$のとき　$A \leqq B$（等号成立は　$a=b$　のとき）

$0<p<1$のとき　$A \geqq B$（等号成立は　$a=b$　のとき）

[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{2}$]

斜辺の長さが 1 である正 n 角錐を考える。つまり，底面を正 n 角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$，頂点を O と表せば $OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n = 1$ である。そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする。

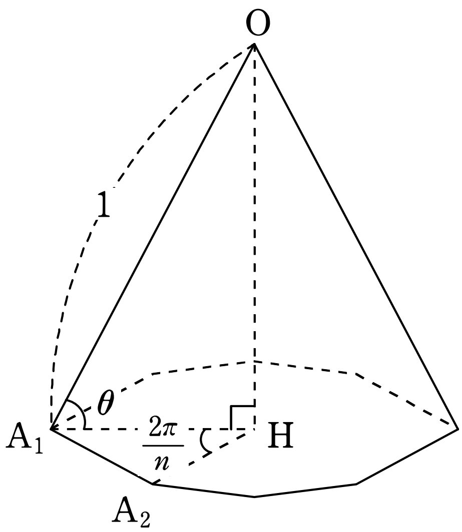
(1) C_n の体積 V_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

---

(1) O から底面の正 n 角形に下ろした垂線の足を H とし，$\angle OA_1H = \theta \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

このとき，$HA_1 = \cos\theta,\ \angle A_1HA_2 = \dfrac{2\pi}{n}$ であり，



（正 n 角形の面積）$= n\times\triangle HA_1A_2$

$$= n\times\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

$OH = \sin\theta = h$ とおくと

（正 n 角形の体積）$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n}{2}\cos^2\theta\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)\sin\theta$

$$= \frac{n}{6}\sin\frac{2\pi}{n}(h-h^3)$$ となる。

$f(h) = h - h^3$ とおくと

$f'(h) = 1-3h^2$ より

$f(h)$ の増減は右表の通り。

h	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$		＋	0	－	
$f(h)$		↗	極大	↘	

よって $h = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに最大となり，

最大値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる。

よって $V_n = \dfrac{n}{6}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}n}{27}\sin\dfrac{2\pi}{n}$

したがって $\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}n}{27}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{n}{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}\,n}{27}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{27}\right)$$

$= \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ となる。

［ 東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{3}$ ］

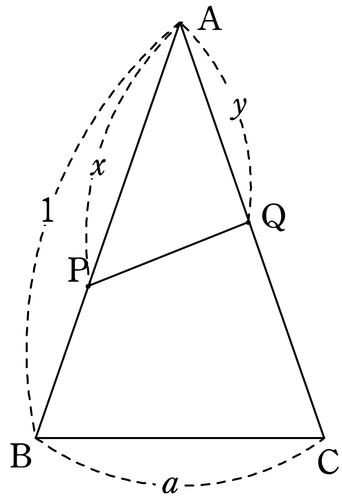
3 辺の長さが$1, 1, a$ である三角形の面積を，周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する。

それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。

三角形の頂点を A, B, C とし， $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$, $\mathrm{BC}=a$ としても一般性を失わない。

三角形の成立条件から $\begin{cases}1+1>a\\1+a>1\end{cases}$ より $0<a<2$ となる。以下，この条件の下で考える。

三角形の周上の 2 点結ぶ線分の両端を P, Q とする。



(ｉ) P, Q がともに等辺上にあるとき

$\mathrm{AP}=x,\ \mathrm{AQ}=y$ とすると

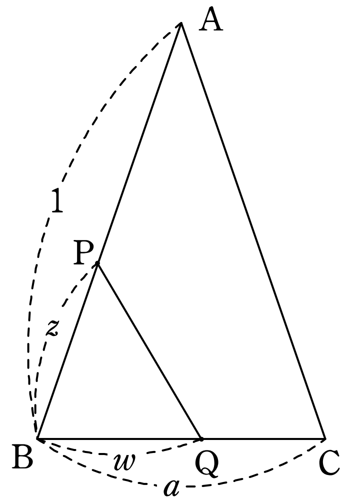
$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ より

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\mathrm{A}$ から $xy=\dfrac{1}{2}$ …①

このとき $\cos\mathrm{A}=\dfrac{1^2+1^2-a^2}{2\cdot1\cdot1}=\dfrac{2-a^2}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=x^2+y^2-2xy\cos A\\&=x^2+y^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2-a^2}{2}\\&\geqq 2xy-\frac{2-a^2}{2}\\&=2xy-1+\frac{a^2}{2}\\&=2\cdot\frac{1}{2}-1+\frac{a^2}{2}\\&=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

（等号成立は $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき）



(ii) P が等辺上，Q が底辺上にあるとき

$\mathrm{BP}=z,\ \mathrm{BQ}=w$ とすると

$\triangle\mathrm{BPQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{BCA}$ より

$\dfrac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BQ}\sin\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\sin\mathrm{B}$ から $zw=\dfrac{a}{2}$ …②

このとき　$\cos\mathrm{B}=\dfrac{a}{2}$　なので

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2&=z^2+w^2-2zw\cos\mathrm{B}\\
&=z^2+w^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\\
&\geqq 2zw-\frac{a^2}{2}\\
&=2\cdot\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2}\\
&=a-\frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$
（等号成立は　$z=w=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$　のとき）

$0<a<2$　において　$\dfrac{a^2}{2}$　と　$a-\dfrac{a^2}{2}$　の大小関係を考える。

$\dfrac{a^2}{2}-\left(a-\dfrac{a^2}{2}\right)=a(a-1)$　より

$0<a\leqq 1$　のとき　$\dfrac{a^2}{2}\leqq a-\dfrac{a^2}{2}$

$1\leqq a<2$　のとき　$\dfrac{a^2}{2}\geqq a-\dfrac{a^2}{2}$　である。

したがって　PQ の最小値は

$0<a\leqq 1$　のとき　$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$1\leqq a<2$　のとき　$\sqrt{a-\dfrac{a^2}{2}}$

［ 東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{4}$ ］

2 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!$ を示せ。ここで e は自然対数の底である。

数学的帰納法により示す。

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)! \quad \cdots（＊）$$

(ⅰ) $n=2$ のとき

$$（（＊）の左辺）=\int_0^1 t^3e^t dt+\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{3}e$$

$$=\Big[e^t(t^3-3t^2+6t-6)\Big]_0^1+2e$$

$$=-2e+6+2e$$

$$=6$$

$$（（＊）の右辺）=(2\cdot 2-1)!$$

$$=3!$$

$$=6$$

よって成り立つ。

(ⅱ) $n=m$ のとき（＊）が成り立つとすると $\displaystyle\int_0^1 t^{2m-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-2k}}{2k+1}\right)e=(2m-1)!$ …①

このとき $\displaystyle\int_0^1 t^{2(m+1)-1}e^t dt=\int_0^1 t^{2m+1}e^t\,dt$

$$=\Big[t^{2m+1}e^t\Big]_0^1-\int_0^1(2m+1)t^{2m}e^t\,dt$$

$$=e-(2m+1)\int_0^1 t^{2m}e^t\,dt$$

$$=e-(2m+1)\left\{\Big[t^{2m}e^t\Big]_0^1-\int_0^1 2mt^{2m-1}e^t\,dt\right\}$$

$$=-2me+(2m+1)2m\int_0^1 t^{2m-1}e^t\,dt$$

また，${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1){}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}$ より

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2(m+1)-1}\mathrm{P}_{2(m+1)-2k}}{2k+1}\right)e=\left(\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{2m}}{3}+\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{2m-2}}{5}+\cdots+\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{4}}{2m-1}+\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{2}}{2m+1}\right)e$$

$$=(2m+1)2m\left(\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-2}}{3}+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-4}}{5}+\cdots+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2}}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}\right)e$$

$$=(2m+1)2m\left(\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-2}}{3}+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-4}}{5}+\cdots+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2}}{2m-1}\right)e+2me$$

$$=(2m+1)2m\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-k}}{2k+1}\right)e+2me$$

したがって，①より

$$\int_0^1 t^{2(m+1)-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2(m+1)-1}\mathrm{P}_{2(m+1)-2k}}{2k+1}\right)e$$

$$=-2me+(2m+1)2m\int_0^1 t^{2m-1}e^t\,dt+(2m+1)2m\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-k}}{2k+1}\right)e+2me$$

$$=(2m+1)(2m)\left\{\int_0^1 t^{2m-1}e^t\,dt+\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-k}}{2k+1}\right)e\right\}$$

$$=(2m+1)(2m)\times(2m-1)!$$

$=(2m+1)!$ となり， $k=m+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ)(ⅱ)から数学的帰納法により題意は示された。

[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

複素平面上の点列 A_n $(n \geqq 0)$ が複素数列 $a_n + ib_n$（a_n, b_n は実数，i は虚数単位）を表すとする。極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$ がともに存在するとき，複素数 $a_\infty + i\,b_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 複素平面上の点列 P_n $(n \geqq 0)$ を次のように定める。

P_0 は 0 を表す点とし，P_1 は $1+i$ を表す点とする。

以下 $n \geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し，長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2) 点列 Q_n $(n \geqq 0)$ は次のように定める。

Q_0 は 0 を表す点とし，Q_1 は $z = x + iy$ を表す点とする。

以下 $n \geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し，長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と(1)の P_∞ が一致するとき z を求めよ。

☆ ☆

(1) 点 P_n を表す複素数を z_n $(n \geqq 0)$ とし，$\alpha = \dfrac{2}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}$ とおく。

このとき，$z_n - z_{n-1} = \alpha(z_{n-1} - z_{n-2})$ $(n \geqq 2)$ であり，$z_0 = 0$ であるから

$$z_n - z_{n-1} = \alpha^{n-1}(z_1 - z_0) = \alpha^{n-1} z_1$$

よって $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} z_1 = \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} z_1$

$|\alpha| < 1$ より $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ であることと $z_1 = 1 + i$ から P_∞ を表す複素数は

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{1-\alpha} z_1 = \frac{1}{1-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}}(1+i) = \frac{3+3i}{2-\sqrt{3}i} = \frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}$$

(2) $\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ とおき，点 Q_∞ を表す複素数を w_∞ とすると

(1)と同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} w_\infty=\frac{w_1}{1-\beta}=\frac{z}{1-\beta}$

Q_∞ と P_∞ が一致するとき， $\dfrac{z}{1-\beta}=\dfrac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}$ となるから

$$z=\frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}\left(1-\beta\right)$$

$$=\frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}\left(1-\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$$

$$=\frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{28}\left(4-\sqrt{3}-i\right)$$

$$=\frac{3\left\{\left(13-5\sqrt{3}\right)+3\left(1+\sqrt{3}\right)i\right\}}{28}$$