[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{1}$]

正の実数 $a,\ b,\ p$ に対して

$$A=(a+b)^p \quad と \quad B=2^{p-1}(a^p+b^p)$$

の大小関係を調べよ。

[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{2}$]

斜辺の長さが 1 である正 n 角錐を考える。つまり，底面を正 n 角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$，頂点を O と表せば $OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n = 1$ である。そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする。

(1) C_n の体積 V_n を求めよ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{3}$]

3 辺の長さが $1,\ 1,\ a$ である三角形の面積を，周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する。

それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。

［ 東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{4}$ ］

2 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!$ を示せ。ここで e は自然対数の底である。

[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{5}$]

複素平面上の点列 A_n $(n \geqq 0)$ が複素数列 $a_n + ib_n$ （a_n, b_n は実数，i は虚数単位）を表すとする。極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$ がともに存在するとき，複素数 $a_\infty + i\,b_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 複素平面上の点列 P_n $(n \geqq 0)$ を次のように定める。

P_0 は 0 を表す点とし，P_1 は $1+i$ を表す点とする。

以下 $n \geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し，長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2) 点列 Q_n $(n \geqq 0)$ は次のように定める。

Q_0 は 0 を表す点とし，Q_1 は $z = x + iy$ を表す点とする。

以下 $n \geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し，長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と(1)の P_∞ が一致するとき z を求めよ。