[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{5}$]

☆────────────────────────☆

複素平面上の点列 A_n $(n\geqq 0)$ が複素数列 a_n+ib_n（a_n, b_n は実数，i は虚数単位）を表すとする。極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$ がともに存在するとき，複素数 $a_\infty + i\,b_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 複素平面上の点列 P_n $(n\geqq 0)$ を次のように定める。

P_0 は 0 を表す点とし，P_1 は $1+i$ を表す点とする。

以下 $n\geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し，長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2) 点列 Q_n $(n\geqq 0)$ は次のように定める。

Q_0 は 0 を表す点とし，Q_1 は $z=x+iy$ を表す点とする。

以下 $n\geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し，長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と(1)の P_∞ が一致するとき z を求めよ。

☆────────────────────────☆

(1) 点 P_n を表す複素数を z_n $(n\geqq 0)$ とし，$\alpha = \dfrac{2}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}$ とおく。

このとき，$z_n - z_{n-1} = \alpha(z_{n-1} - z_{n-2})$ $(n\geqq 2)$ であり，$z_0 = 0$ であるから

$$z_n - z_{n-1} = \alpha^{n-1}(z_1 - z_0) = \alpha^{n-1} z_1$$

よって $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} z_1 = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} z_1$

$|\alpha|<1$ より $\lim_{n\to\infty}\alpha^n = 0$ であることと $z_1 = 1+i$ から P_∞ を表す複素数は

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{1-\alpha} z_1 = \frac{1}{1-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}}(1+i) = \frac{3+3i}{2-\sqrt{3}i} = \frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}$$

(2) $\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ とおき，点 Q_∞ を表す複素数を w_∞ とすると

(1)と同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty}w_\infty=\frac{w_1}{1-\beta}=\frac{z}{1-\beta}$

Q_∞ と P_∞ が一致するとき，$\dfrac{z}{1-\beta}=\dfrac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}$ となるから

$$z=\frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}\left(1-\beta\right)$$

$$=\frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{7}\left(1-\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$$

$$=\frac{3\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}}{28}\left(4-\sqrt{3}-i\right)$$

$$=\frac{3\left\{\left(13-5\sqrt{3}\right)+3\left(1+\sqrt{3}\right)i\right\}}{28}$$