［ 東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{4}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

2 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!$ を示せ。ここで e は自然対数の底である。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

数学的帰納法により示す。

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)! \quad \cdots（＊）$$

(ｉ) $n=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
（（＊）の左辺）&=\int_0^1 t^3e^t dt+\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{3}e\\
&=\left[e^t(t^3-3t^2+6t-6)\right]_0^1+2e\\
&=-2e+6+2e\\
&=6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
（（＊）の右辺）&=(2\cdot 2-1)!\\
&=3!\\
&=6
\end{aligned}
$$

よって成り立つ。

(ii) $n=m$ のとき（＊）が成り立つとすると $\displaystyle\int_0^1 t^{2m-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-2k}}{2k+1}\right)e=(2m-1)! \quad \cdots①$

このとき $\displaystyle\int_0^1 t^{2(m+1)-1}e^t dt=\int_0^1 t^{2m+1}e^t\,dt$

$$
\begin{aligned}
&=\left[t^{2m+1}e^t\right]_0^1-\int_0^1(2m+1)t^{2m}e^t\,dt\\
&=e-(2m+1)\int_0^1 t^{2m}e^t\,dt\\
&=e-(2m+1)\left\{\left[t^{2m}e^t\right]_0^1-\int_0^1 2mt^{2m-1}e^t\,dt\right\}\\
&=-2me+(2m+1)2m\int_0^1 t^{2m-1}e^t\,dt
\end{aligned}
$$

また，${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}$ より

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2(m+1)-1}\mathrm{P}_{2(m+1)-2k}}{2k+1}\right)e=\left(\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{2m}}{3}+\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{2m-2}}{5}+\cdots+\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{4}}{2m-1}+\frac{{}_{2m+1}\mathrm{P}_{2}}{2m+1}\right)e$$

$$=(2m+1)2m\left(\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-2}}{3}+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-4}}{5}+\cdots+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2}}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}\right)e$$

$$=(2m+1)2m\left(\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-2}}{3}+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-4}}{5}+\cdots+\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2}}{2m-1}\right)e+2me$$

$$=(2m+1)2m\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-k}}{2k+1}\right)e+2me$$

したがって，①より

$$\int_0^1 t^{2(m+1)-1}e^t\,dt+\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2(m+1)-1}\mathrm{P}_{2(m+1)-2k}}{2k+1}\right)e$$

$$=-2me+(2m+1)2m\int_0^1 t^{2m-1}e^t\,dt+(2m+1)2m\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-k}}{2k+1}\right)e+2me$$

$$=(2m+1)(2m)\left\{\int_0^1 t^{2m-1}e^t\,dt+\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{2m-1}\mathrm{P}_{2m-k}}{2k+1}\right)e\right\}$$

$$=(2m+1)(2m)\times(2m-1)!$$

$=(2m+1)!$ となり， $k=m+1$ のときも成り立つ。

(ｉ)(ii)から数学的帰納法により題意は示された。