［ 東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{3}$ ］

☆

3 辺の長さが$1, 1, a$ である三角形の面積を，周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する。

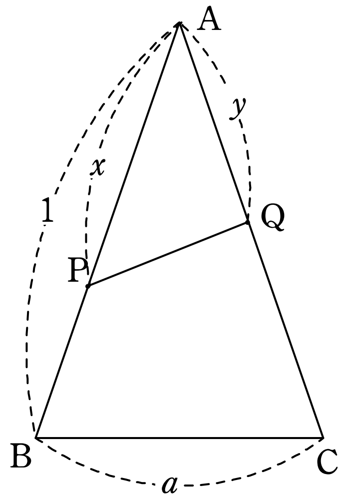
それらの線分の長さの最小値をaを用いて表せ。

☆

三角形の頂点をA, B, Cとし， $AB=AC=1,\ BC=a$ としても一般性を失わない。

三角形の成立条件から $\begin{cases}1+1>a\\1+a>1\end{cases}$ より $0<a<2$ となる。以下，この条件の下で考える。

三角形の周上の 2 点結ぶ線分の両端を P, Q とする。



(ｉ) P, Q がともに等辺上にあるとき

$AP=x,\ AQ=y$ とすると

$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}\triangle ABC$ より

$\dfrac{1}{2}AP\cdot AQ\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$ から $xy=\dfrac{1}{2}$ …①

このとき $\cos A=\dfrac{1^2+1^2-a^2}{2\cdot1\cdot1}=\dfrac{2-a^2}{2}$ なので

$$PQ^2=x^2+y^2-2xy\cos A$$

$$=x^2+y^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2-a^2}{2}$$

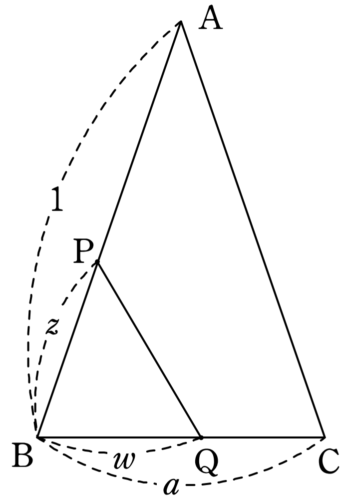
$$\geqq 2xy-\frac{2-a^2}{2}$$

$$=2xy-1+\frac{a^2}{2}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}-1+\frac{a^2}{2}$$

$$=\frac{a^2}{2}$$ （等号成立は $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき）

(ii) P が等辺上，Q が底辺上にあるとき



$BP=z,\ BQ=w$ とすると

$\triangle BPQ=\dfrac{1}{2}\triangle BCA$ より

$\dfrac{1}{2}BP\cdot BQ\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin B$ から $zw=\dfrac{a}{2}$ …②

このとき $\cos\mathrm{B}=\dfrac{a}{2}$ なので

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= z^2+w^2-2zw\cos\mathrm{B}\\
&= z^2+w^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\\
&\geqq 2zw-\frac{a^2}{2}\\
&= 2\cdot\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2}\\
&= a-\frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$

（等号成立は $z=w=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ のとき）

$0<a<2$ において $\dfrac{a^2}{2}$ と $a-\dfrac{a^2}{2}$ の大小関係を考える。

$\dfrac{a^2}{2}-\left(a-\dfrac{a^2}{2}\right)=a(a-1)$ より

$0<a\leqq 1$ のとき $\dfrac{a^2}{2}\leqq a-\dfrac{a^2}{2}$

$1\leqq a<2$ のとき $\dfrac{a^2}{2}\geqq a-\dfrac{a^2}{2}$ である。

したがって PQ の最小値は

$0<a\leqq 1$ のとき $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$1\leqq a<2$ のとき $\sqrt{a-\dfrac{a^2}{2}}$