［ 東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{2}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

斜辺の長さが 1 である正 n 角錐を考える。つまり，底面を正 n 角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$，頂点を O と表せば $OA_1=OA_2=\cdots=OA_n=1$ である。そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする。

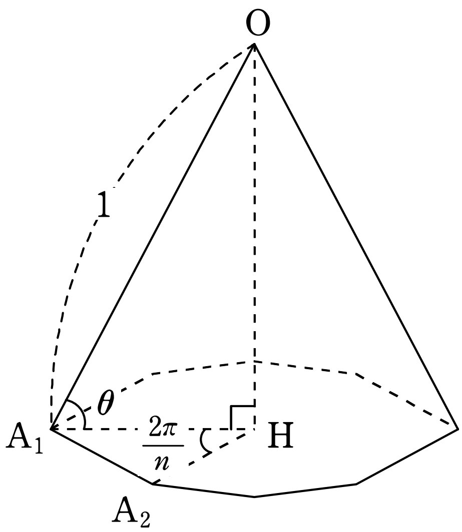
(1) C_n の体積 V_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}V_n$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) O から底面の正 n 角形に下ろした垂線の足を H とし，$\angle OA_1H=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

このとき，$HA_1=\cos\theta,\ \angle A_1HA_2=\dfrac{2\pi}{n}$ であり，



$$（正 n 角形の面積）=n\times\triangle HA_1A_2$$
$$=n\times\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

$OH=\sin\theta=h$ とおくと

$$（正 n 角形の体積）=\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2}\cos^2\theta\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)\sin\theta$$
$$=\frac{n}{6}\sin\frac{2\pi}{n}(h-h^3)\ \text{となる。}$$

$f(h)=h-h^3$ とおくと

$f'(h)=1-3h^2$ より

$f(h)$ の増減は右表の通り。

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$		＋	0	－	
$f(h)$		↗	極大	↘	

よって $h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに最大となり，

最大値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる。

よって $V_n=\dfrac{n}{6}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}n}{27}\sin\dfrac{2\pi}{n}$

したがって $\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}n}{27}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\frac{n}{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{3}\,n}{27}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot 2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{27}\right)$$

$= \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ となる。