[東京工業大学 1999 年前期 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

正の実数 $a,\ b,\ p$ に対して

$$A=(a+b)^p \quad と \quad B=2^{p-1}(a^p+b^p)$$

の大小関係を調べよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

$$\frac{A}{a^p}=\frac{(a+b)^p}{a^p}=\left(1+\frac{b}{a}\right)^p,\quad \frac{B}{a^p}=2^{p-1}\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p\right\} \text{ であり}$$

$\dfrac{b}{a}=x$ とおくと $\dfrac{A}{a^p}=(1+x)^p$, $\dfrac{B}{a^p}=2^{p-1}(1+x^p)$ となる。

a^p は正の実数であるから $A,\ B$ の大小関係を調べる代わりに, $\dfrac{A}{a^p},\ \dfrac{B}{a^p}$ の大小関係を調べても結果は同じである。

$p=1$ のときは $A=B$ である。

$p\neq 1$ のとき

$f(x)=(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)$ とおく。

$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-2^{p-1}px^{p-1}=p\left\{(1+x)^{p-1}-(2x)^{p-1}\right\}$ となる。

(ｉ) $p>1$ のとき $f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のときで, $f(1)=0$, $p-1>0$ から

$f(x)$ の増減は次の通り。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		＋	0	－
$f(x)$		↗	0	↘

よって $f(x)\leqq 0$ であるから $\dfrac{A}{a^p}\leqq\dfrac{B}{a^p}$ （等号成立は $x=1$ のとき）

(ⅱ) $0<p<1$ のとき $f(1)=0$, $p-1<0$ から

$f(x)$ の増減は次の通り。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		－	0	＋
$f(x)$		↘	0	↗

よって　$f(x) \geqq 0$　であるから　$\dfrac{A}{a^p} \geqq \dfrac{B}{a^p}$　（等号成立は　$x=1$　のとき）

したがって　$p=1$のとき　$A=B$

$p>1$のとき　$A \leqq B$（等号成立は　$a=b$　のとき）

$0<p<1$のとき　$A \geqq B$（等号成立は　$a=b$　のとき）