[東京工業大学 1998 年後期 $\boxed{1}$]

☆────────────────────────────────────☆

実数 a, b に対し $x_n = \dfrac{1}{n^b}\left\{\dfrac{1}{n^a}+\dfrac{1}{(n+1)^a}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^a}\right\}$, $n=1, 2, 3, \cdots$ とおく。

$n\to\infty$ のとき x_n が収束するための a, b の条件およびそのときの極限値を求めよ。

☆────────────────────────────────────☆

$$x_n = \frac{1}{n^b}\left\{\frac{1}{n^a}+\frac{1}{(n+1)^a}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^a}\right\}$$

$$=\frac{1}{n^b}\left\{\frac{1}{n^a}+\frac{1}{(n+1)^a}+\cdots+\frac{1}{(n+n-1)^a}\right\}$$

$$=\frac{1}{n^{a+b-1}}\cdot\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{0}{n}\right)^a}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^a}\right\}$$

$$=\frac{1}{n^{a+b-1}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a}$$

であり， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^a}dx$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b-1}}$ が収束 である。

よって $a+b-1\geqq 0$ すなわち $a+b\geqq 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ は収束する。

（ i ） $a\neq 1$ のとき

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^a}dx=\left[\frac{1}{-a+1}(1+x)^{-a+1}\right]_0^1=\frac{2^{-a+1}-1}{-a+1}$$

（ii） $a=1$ のとき

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^a}dx=\left[\log|1+x|\right]_0^1=\log 2$$

であるから,

$a+b>1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$a+b=1,\ a\neq 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2^{-a+1}-1}{-a+1}$

$a=1,\ b=0$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = \log 2$

である。

［ 東京工業大学 1998 年後期 $\boxed{2}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

yz 平面の直線 $y=z$ を ℓ_1，直線 $y=z+\sqrt{2}$ を ℓ_2 とする。xyz 空間において ℓ_1 を軸にして ℓ_2 を回転してできる円柱面（内部は含まない）を C とする。さらに z 軸を軸として C を回転してできる回転体を R とする。

(1) xy 平面で C を切った切り口に現れる楕円の方程式を求めよ。

(2) R の yz 平面による断面を図示せよ。

(3) R の $-2\leqq z\leqq 2$ の部分の体積を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から ℓ_1 に下ろした垂線の足を H とする。

$\overrightarrow{\ell_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ とおくと，$|\overrightarrow{\ell_1}|=1$ であり，$\angle\mathrm{POH}=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\left(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta\right)\overrightarrow{\ell_1}\\&=\left(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\ell_1}|\cos\theta\right)\overrightarrow{\ell_1}\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\ell_1}\right)\overrightarrow{\ell_1}\\&=\frac{y+z}{2}(0,1,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}\\&=\left(x,\ \frac{y-z}{2},\ \frac{-y+z}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。

$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|=1$ より $x^2+\dfrac{(y-z)^2}{2}=1$ …①

①において $z=0$ としたものが求める楕円の方程式であるから $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

(2) yz 平面で C を切ったときの切り口は①において $x=0$ として

$y-z=\pm\sqrt{2}$ …②

R の平面 $z=k$ による切り口を考える。対称性より $k\geqq 0$ としておく。

（ⅰ）$k \geqq \sqrt{2}$ のとき

内径 $k-\sqrt{2}$，外径 $k+\sqrt{2}$ の円環となる。

（ⅱ）$0 \geqq k \leqq \sqrt{2}$ のとき

①で $z=k\ (\geqq 0)$ とすると，平面 $z=k$ 上での楕円の方程式 $x^2+\dfrac{(y-k)^2}{2}=1$ …③ を得る。

③上の点 $(x,\ y)$ に対して，z 軸との距離の 2 乗は

$$x^2+y^2=1-\frac{(y-k)^2}{2}+y^2=\frac{1}{2}(y+k)^2-k^2+1 \quad \cdots ④$$

で表される。

③より $x^2=1-\dfrac{(y-k)^2}{2} \geqq 0$ から $k-\sqrt{2} \leqq y \leqq k+\sqrt{2}$ …⑤ である。

④は，$0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$y=-k$ のときに最小値 $-k^2+1$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq k \leqq \sqrt{2}$ のとき，$y=k-\sqrt{2}$ のときに最小値 $\left(k-\sqrt{2}\right)^2$

をとり，$y=k+\sqrt{2}$ のときに最大値 $\left(k+\sqrt{2}\right)^2$ となる。

したがって，

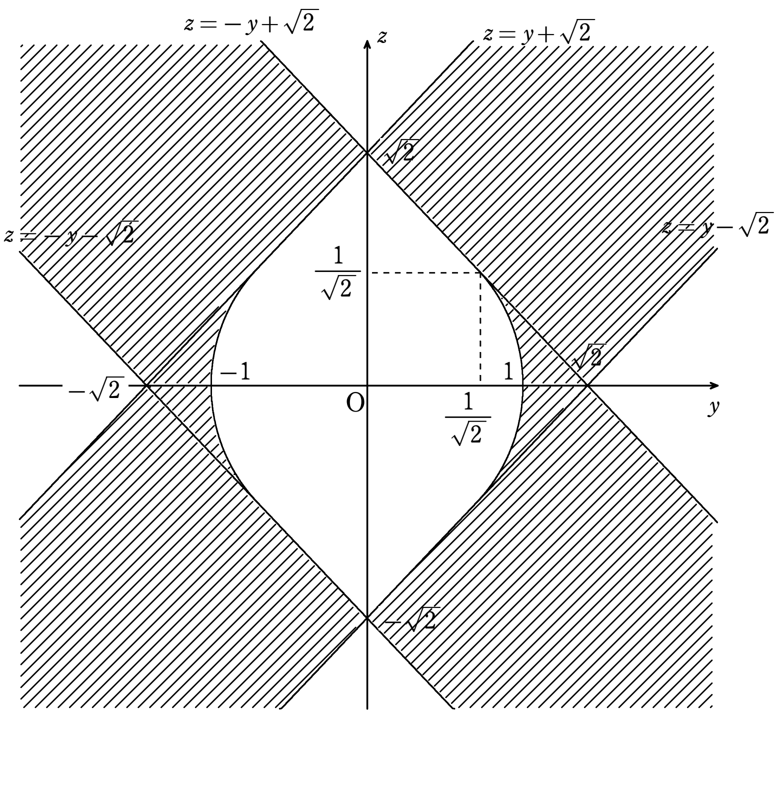
$0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき 内径 $\sqrt{-k^2+1}$，外径 $k+\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq k \leqq \sqrt{2}$ のとき 内径 $\sqrt{\left(k-\sqrt{2}\right)^2}$，外径 $k+\sqrt{2}$

の円環となる。

よって，R の yz 平面による断面は

対称性も考えて次の図のようになる。



(3) 求める体積をV とすると

$$\frac{V}{2}=\int_0^2 \pi\left(z+\sqrt{2}\right)^2 dz-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi\left(z^2+1\right)dz-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\pi\left(z-\sqrt{2}\right)^2 dz$$

$$V=2\pi\left\{\left[\frac{1}{3}z^3+\sqrt{2}z^2+2z\right]_0^2-\left[-\frac{1}{3}z^3+z\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\left[\frac{1}{3}z^3-\sqrt{2}z^2+2z\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2\right\}$$

$$=2\pi\left\{\frac{8}{3}+4\sqrt{2}+4-\left(-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left\{\left(\frac{8}{3}-4\sqrt{2}+4\right)-\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)\right\}\right\}$$

$$=\frac{49\sqrt{2}}{3}\pi$$