[東京工業大学 1998 年後期 $\boxed{1}$]

実数 a, b に対し $x_n = \dfrac{1}{n^b}\left\{\dfrac{1}{n^a} + \dfrac{1}{(n+1)^a} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^a}\right\}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ とおく。

$n \to \infty$ のとき x_n が収束するための a, b の条件およびそのときの極限値を求めよ。

$$x_n = \frac{1}{n^b}\left\{\frac{1}{n^a} + \frac{1}{(n+1)^a} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^a}\right\}$$

$$= \frac{1}{n^b}\left\{\frac{1}{n^a} + \frac{1}{(n+1)^a} + \cdots + \frac{1}{(n+n-1)^a}\right\}$$

$$= \frac{1}{n^{a+b-1}} \cdot \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{0}{n}\right)^a} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^a}\right\}$$

$$= \frac{1}{n^{a+b-1}} \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a}$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^a}dx$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+b-1}}$ が収束　である。

よって $a+b-1 \geqq 0$ すなわち $a+b \geqq 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ は収束する。

（ｉ）$a \neq 1$ のとき

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^a}dx = \left[\frac{1}{-a+1}(1+x)^{-a+1}\right]_0^1 = \frac{2^{-a+1}-1}{-a+1}$$

（ii）$a = 1$ のとき

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^a}dx = \left[\log|1+x|\right]_0^1 = \log 2$$

であるから，

$a+b>1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$a+b=1,\ a\neq 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2^{-a+1}-1}{-a+1}$

$a=1,\ b=0$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = \log 2$

である。