[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$a>0$ とし，$x,\ y$ が 4 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+3y\leqq 12$，$ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y\leqq 8$ を同時に満たしているとする。このとき $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y\leqq 8$ …①

① ⇔ $a(2x-3y)+8(y-2)\leqq 0$ …②

⇔ $x\leqq\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{a}\right)y+\dfrac{8}{a}$

②で等号が成り立つのは $\begin{cases}2x-3y=0\\8(y-2)=0\end{cases}$ のときで，このとき $x=3,\ y=2$

よって①は a の値に関係なく，定点 $(3,\ 2)$ を必ず通る直線である。

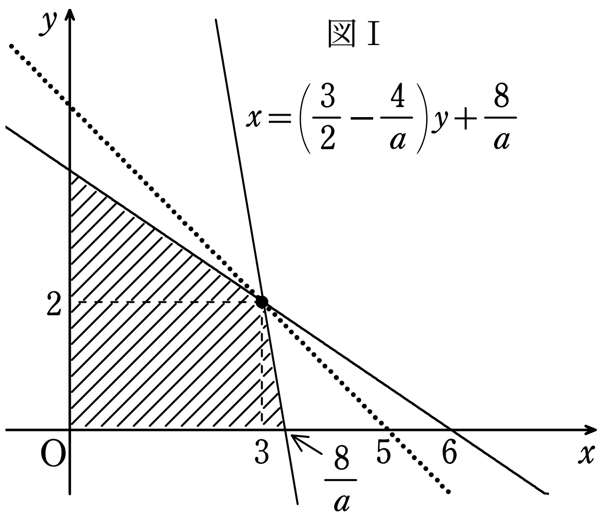
また，x 切片は $\dfrac{8}{a}$ であり，直線 $x+y=k$ がこの定点を通るとき x 切片は 5 である。

(ｉ) $\dfrac{8}{a}\leqq 5$ ⇔ $a\geqq\dfrac{8}{5}$ のとき

4 つの不等式を同時に満たす $(x,\ y)$ の領域は図Ⅰのようになるから

$x+y$ は，$(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大である。

よって $f(a)=5$

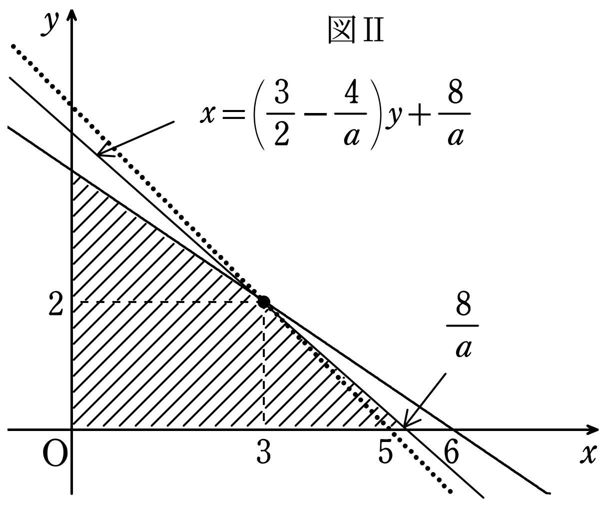


(ⅱ) $5\leqq\dfrac{8}{a}\leqq 6$ ⇔ $\dfrac{4}{3}\leqq a\leqq\dfrac{8}{5}$ のとき

(ｉ)と同様に考えて図Ⅱから

$x+y$ は，$(x,\ y)=\left(\dfrac{8}{a},\ 0\right)$ で最大である。

よって $f(a)=\dfrac{8}{a}$



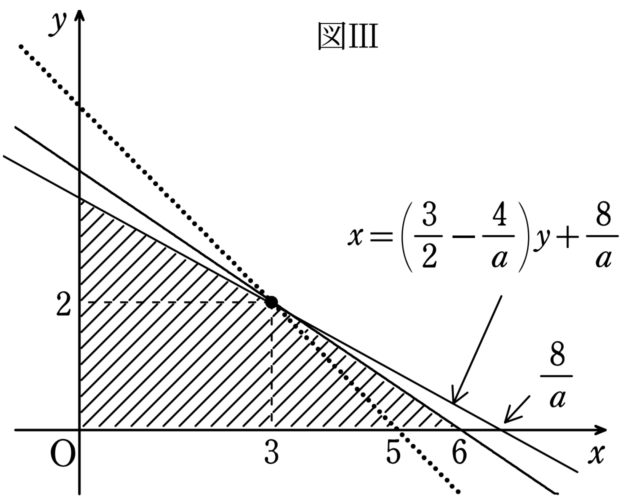
(iii) $\dfrac{8}{a} \geqq 6 \iff 0 < a \leqq \dfrac{4}{3}$ のとき

(ｉ)と同様に考えて図IIIから

$x+y$ は，$(x,\ y)=(6,\ 0)$ で最大である。

よって　$f(a)=6$

図III



以上より

$$f(a)=\begin{cases} 5 & \left(a \geqq \dfrac{8}{5}\right) \\ \dfrac{8}{a} & \left(\dfrac{4}{3} \leqq a \leqq \dfrac{8}{5}\right) \\ 6 & \left(0 < a \leqq \dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{2}$]

R を隣りあう 2 辺の長さ a, b が $2a > b > a$ を満たす長方形とし， A を次の性質(P)を持つ半径 x の円とする。

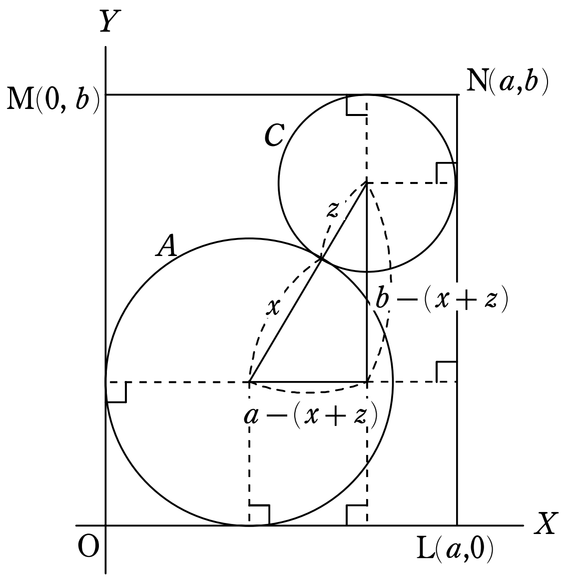
(P) R の内部にあって隣りあう 2 辺にだけ接する。

(1) 性質(P)を持つ円で円 A に外接するものが 4 つ存在するために，円 A の半径 x が満たすべき条件を a, b を使って表せ。

(2) x が(1)の条件を満たすとき，円 A に外接する 4 つの円のうち 2 番目に大きい円を B とする。x が変化するとき円 A と円 B の面積の和の最小値を求めよ。

---

(1) XY 座標平面に，図のように 4 点 O, L, M, N を定める。



このとき，図のように円 A, LN, MN に接する円が存在すれば，条件を満たす円は 4 つ存在する。

実際，例えば円 C が円 A と LN に接しながら移動すると，円 C の中心は点 (x, x) を焦点， $X = a + x$ を準線とする放物線上を動き，円 A, OL, LN に接する円は存在する。

同様に考えると，円 A, OM, MN に接する円も存在する。

また，円 A と OL, OM で囲まれた部分には，明らかに１つの円が存在する。これより 4 つの円が存在する。

円 C の半径を z とすると，三平方の定理から $(x+z)^2 = \{a-(x+z)\}^2 + \{b-(x+z)\}^2$ …①

ただし，円 A が存在する条件から $2x < a$ である。

①を z について整理し，平方完成すると $\{z-(a+b-x)\}^2 - 2ab = 0$ …②

②が $0 < z < \dfrac{a}{2}$ に実数解をもつ条件を求めればよい。

②の左辺を $f(z)$ とおくと 2 次関数 $y = f(z)$ の軸 $a+b-x > \dfrac{a}{2}$ に注意して

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f\left(\dfrac{a}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b-x)^2 - 2ab > 0 \\ \left(-\dfrac{a}{2} - b + x\right)^2 - 2ab < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b-x)^2 > 2ab \\ \left(-\dfrac{a}{2}-b+x\right)^2 < 2ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-x > \sqrt{2ab} \\ -\left(-\dfrac{a}{2}-b+x\right) < \sqrt{2ab} \end{cases}$$

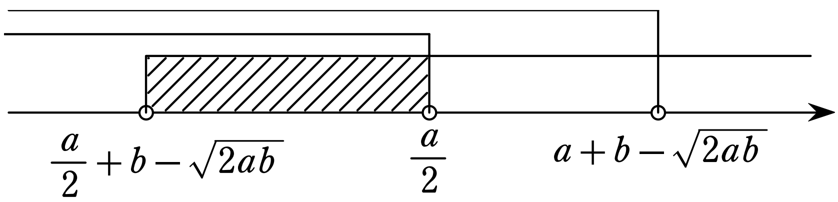
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < a+b-\sqrt{2ab} \\ x > \dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab} \end{cases} \cdots③$$

ここで，$a+b-\sqrt{2ab}=\dfrac{a}{2}+\left(\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)^2$ より $\dfrac{a}{2}<a+b-\sqrt{2ab}$

$a<b<2a$ なので

$\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab}=\dfrac{a}{2}-\sqrt{b}\left(\sqrt{2a}-\sqrt{b}\right)$ より $\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab}<\dfrac{a}{2}$ であり，

③ かつ $2x<a$ $\left(\Leftrightarrow x<\dfrac{a}{2}\right)$ より



求める条件は $\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab}<x<\dfrac{a}{2}$ すなわち $\left(\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)^2<x<\dfrac{a}{2}$

(2) (1)での考察と $b>a$ より 円 B はOM, MN に接する円である。

円 B の半径を y とすると，三平方の定理から

$(x+y)^2=\{b-(x+y)\}^2+(x-y)^2 \Leftrightarrow \{y-(b+x)\}^2=4bx$

$y<b+x$ より $y=\left(\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^2$

よって $x^2+y^2=x^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^4 \cdots④$

④の右辺において $u=\sqrt{x}$ としたものを $g(u)$ とすると

$$g(u)=u^4+\left(\sqrt{b}-u\right)^4$$

$$g'(u)=4\left(2u-\sqrt{b}\right)\left\{\sqrt{b}u+\left(\sqrt{b}-u\right)^2\right\}$$

(1)より $\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}<u<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ であり，$a<b<2a$ より

$\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ はこの区間に入り，$g'(u)$ は $u=\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ の前後で負から正に変化する。

よって，求める最小値は $\pi\cdot g\left(\dfrac{\sqrt{b}}{2}\right)=\dfrac{\pi b^2}{8}$

[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{3}$]

(1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ とし，t を実数とする。すべての自然数 n に対し実数 $f_n(t)$ が

$f_n(t)=f(f_{n-1}(t)),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，ただし，$f_0(t)=t$ によって帰納的に定義できるための t の条件を求めよ。

(2) $a\geqq 1$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt$ を求めよ。

---

(1) $f_1(t)=f(f_0(t))=\dfrac{2f_0(t)-1}{f_0(t)}=\dfrac{2t-1}{t}$

$f_2(t)=f(f_1(t))=\dfrac{2f_1(t)-1}{f_1(t)}=\dfrac{3t-2}{2t-1}$ より $f_n(t)=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$ $(n\geqq 0)$ と推定できる。

これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

(ｉ) $n=0$ のとき

$f_0(t)=t$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

推定が成り立つと仮定すると $f_k(t)=\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}$

このとき，$f_{k+1}(t)=f(f_k(t))$

$$=\frac{2f_k(t)-1}{f_k(t)}$$

$$=\frac{2\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}-1}{\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}}$$

$$=\frac{(k+2)t-(k+1)}{(k+1)t-k}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上から $f_n(t)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が帰納的に定義できるための条件は $f_n(t)\neq 0$

すなわち $t\neq\dfrac{n-1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt = n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}-1\right\}dt$

$$= n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{t-1}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$= n\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{nt-n}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$= n\int_a^{a+\frac{1}{n}}1\,dt-\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{n}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$= n\cdot\frac{1}{n}-\Big[\log|nt-(n-1)|\Big]_a^{a+\frac{1}{n}}$$

$$=1-\log\left|\frac{(a-1)n+2}{(a-1)n+1}\right|$$

$$=1-\log\left|\frac{a-1+\frac{2}{n}}{a-1+\frac{1}{n}}\right|$$

したがって　$a=1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt=1-\log 2$

$a>1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt=1$

[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{4}$]

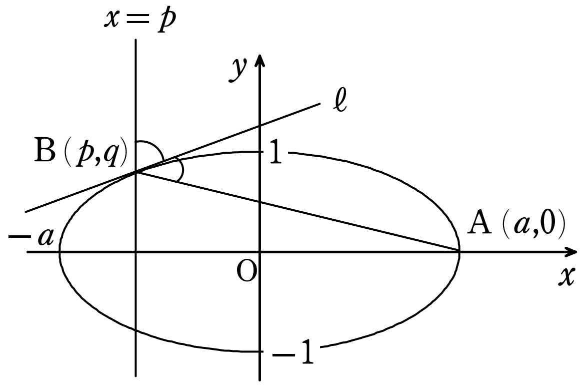
楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる。C 上の点 $\mathrm{B}(p,\ q)\ (q>0)$ における接線 ℓ と線分 BA のなす角が，ℓ と直線 $x=p$ のなす角に等しいとする。ただし，2 直線のなす角は鋭角の方をとることにする。

(1) 座標 p を a で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to1}p$ および $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}$ を求めよ。

---

(1) B が第 1 象限にあるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は ℓ と $x=p$ とのなす鋭角内にあるので不適。



よって $p=a\cos\theta\ (<0),\ q=\sin\theta$ とおくことができ，

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(a(1-\cos\theta),\ -\sin\theta\right)$ となる。

また，直線 ℓ と $x=p$ の方向ベクトルをそれぞれ

$\vec{\ell}=(a\sin\theta,\ -\cos\theta),\ \vec{m}=(0,\ |\overrightarrow{\mathrm{BA}}|)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\vec{m}\ /\!/\ \vec{\ell}$ だから

$\left(a(1-\cos\theta),\ -\sin\theta+|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\right)\ /\!/\ (a\sin\theta,\ -\cos\theta)$

よって $a\sin\theta\left(-\sin\theta+|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\right)=-\cos\theta\cdot a(1-\cos\theta)$

両辺を a で割って整理すると

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\sin\theta=1-\cos\theta$

両辺を平方して $1-\cos\theta$ で割ると

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\sin^2\theta=(1-\cos\theta)^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2(1-\cos^2\theta)=(1-\cos\theta)^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$ …①

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=a^2(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$ より

①は $\left\{a^2(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right\}(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$

$$a^2(1-\cos^2\theta)(1-\cos\theta)+(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$$

$$a^2(1-\cos^2\theta)+(1+\cos\theta)^2=1$$

$$a^2-a^2\cos^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta=1$$

$$(1-a^2)\cos^2\theta+2\cos\theta+a^2=0$$

$(a^2-1)\cos^2\theta-2\cos\theta-a^2=0$ となる。

$\cos\theta<0$ より $\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1}$

したがって $p=a\cos\theta=\dfrac{a\left(1-\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}{a^2-1}$

(2) (1)より $\lim\limits_{a\to1}p=\lim\limits_{a\to1}\dfrac{a\left(1-\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}{a^2-1}$

$$=\lim_{a\to1}\frac{a\left(1-\sqrt{a^4-a^2+1}\right)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}{(a^2-1)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to1}\frac{a\left(-a^4+a^2\right)}{(a^2-1)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to1}\frac{-a^3\left(a^2-1\right)}{(a^2-1)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to1}\frac{-a^3}{1+\sqrt{a^4-a^2+1}}$$

$=-\dfrac{1}{2}$ であり,

さらに $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{p}{a}=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1}$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a^2}-\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}}}{1-\dfrac{1}{a^2}}$$

$=-1$ となる。