[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

$a>0$ とし，$x,\ y$ が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+3y \leqq 12$，$ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y \leqq 8$ を同時に満たしているとする。このとき $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{2}$]

☆─────────────────────────────☆

R を隣りあう 2 辺の長さ a, b が $2a > b > a$ を満たす長方形とし，A を次の性質 (P) を持つ半径 x の円とする。

(P)　R の内部にあって隣りあう 2 辺にだけ接する。

(1) 性質 (P) を持つ円で円 A に外接するものが 4 つ存在するために，円 A の半径 x が満たすべき条件を a, b を使って表せ。

(2) x が(1)の条件を満たすとき，円 A に外接する 4 つの円のうち 2 番目に大きい円を B とする。x が変化するとき円 A と円 B の面積の和の最小値を求めよ。

☆─────────────────────────────☆

[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{3}$]

(1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ とし，t を実数とする。すべての自然数 n に対し実数 $f_n(t)$ が

$f_n(t)=f(f_{n-1}(t)),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，ただし，$f_0(t)=t$ によって帰納的に定義できるための t の条件を求めよ。

(2) $a \geqq 1$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}} (f_n(t)-1)\,dt$ を求めよ。

[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{4}$]

楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる。C 上の点 $\mathrm{B}(p,\ q)\ (q>0)$ における接線 ℓ と線分 BA のなす角が，ℓ と直線 $x=p$ のなす角に等しいとする。ただし，2 直線のなす角は鋭角の方をとることにする。

(1) 座標 p を a で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to 1} p$ および $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}$ を求めよ。