[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{4}$]

☆―――☆

楕円 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる。C 上の点 $\mathrm{B}(p,\ q)\ (q>0)$ における接線 ℓ と線分 BA のなす角が，ℓ と直線 $x=p$ のなす角に等しいとする。ただし，2 直線のなす角は鋭角の方をとることにする。

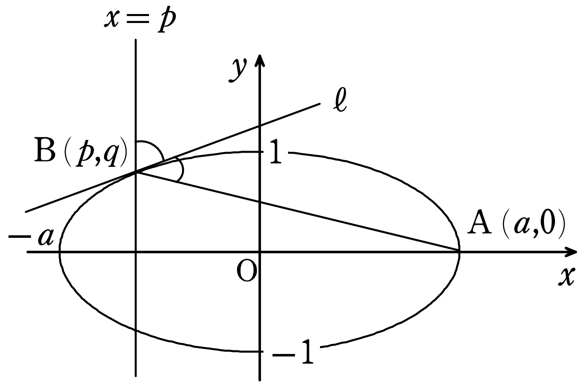
(1) 座標 p を a で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to1} p$ および $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}$ を求めよ。

☆―――☆

(1) B が第 1 象限にあるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は ℓ と $x=p$ とのなす鋭角内にあるので不適。

よって $p=a\cos\theta\ (<0),\ q=\sin\theta$ とおくことができ，



$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(a(1-\cos\theta),\ -\sin\theta\right)$ となる。

また，直線 ℓ と $x=p$ の方向ベクトルをそれぞれ

$\vec{\ell}=(a\sin\theta,\ -\cos\theta),\ \vec{m}=(0,\ |\overrightarrow{\mathrm{BA}}|)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\vec{m}\ /\!/\ \vec{\ell}$ だから

$\left(a(1-\cos\theta),\ -\sin\theta+|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\right)\ /\!/\ (a\sin\theta,\ -\cos\theta)$

よって $a\sin\theta\left(-\sin\theta+|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\right)=-\cos\theta\cdot a(1-\cos\theta)$

両辺を a で割って整理すると

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\sin\theta=1-\cos\theta$

両辺を平方して $1-\cos\theta$ で割ると

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\sin^2\theta=(1-\cos\theta)^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2(1-\cos^2\theta)=(1-\cos\theta)^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$ …①

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=a^2(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$ より

①は $\left\{a^2(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right\}(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$

$$a^2(1-\cos^2\theta)(1-\cos\theta)+(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$$

$$a^2(1-\cos^2\theta)+(1+\cos\theta)^2=1$$

$$a^2-a^2\cos^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta=1$$

$$(1-a^2)\cos^2\theta+2\cos\theta+a^2=0$$

$(a^2-1)\cos^2\theta-2\cos\theta-a^2=0$ となる。

$\cos\theta<0$ より $\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1}$

したがって $p=a\cos\theta=\dfrac{a\left(1-\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}{a^2-1}$

(2) (1)より $\displaystyle\lim_{a\to1}p=\lim_{a\to1}\frac{a\left(1-\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}{a^2-1}$

$$=\lim_{a\to1}\frac{a\left(1-\sqrt{a^4-a^2+1}\right)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}{(a^2-1)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to1}\frac{a\left(-a^4+a^2\right)}{(a^2-1)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to1}\frac{-a^3\left(a^2-1\right)}{(a^2-1)\left(1+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to1}\frac{-a^3}{1+\sqrt{a^4-a^2+1}}$$

$=-\dfrac{1}{2}$ であり,

さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{1-\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1}$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a^2}-\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}}}{1-\dfrac{1}{a^2}}$$

$=-1$ となる。