[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{3}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ とし，t を実数とする。すべての自然数 n に対し実数 $f_n(t)$ が

$f_n(t)=f(f_{n-1}(t)),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，ただし，$f_0(t)=t$ によって帰納的に定義できるための t の条件を求めよ。

(2) $a\geqq 1$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $f_1(t)=f(f_0(t))=\dfrac{2f_0(t)-1}{f_0(t)}=\dfrac{2t-1}{t}$

$f_2(t)=f(f_1(t))=\dfrac{2f_1(t)-1}{f_1(t)}=\dfrac{3t-2}{2t-1}$ より $f_n(t)=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$ $(n\geqq 0)$ と推定できる。

これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

(ⅰ) $n=0$ のとき

$f_0(t)=t$ より成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ のとき

推定が成り立つと仮定すると $f_k(t)=\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}$

このとき，$f_{k+1}(t)=f(f_k(t))$

$$=\frac{2f_k(t)-1}{f_k(t)}$$

$$=\frac{2\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}-1}{\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}}$$

$$=\frac{(k+2)t-(k+1)}{(k+1)t-k}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上から $f_n(t)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が帰納的に定義できるための条件は $f_n(t)\neq 0$

すなわち $t\neq\dfrac{n-1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt=n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}-1\right\}dt$

$$=n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{t-1}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$=n\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{nt-n}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$=n\int_a^{a+\frac{1}{n}}1\,dt-\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{\frac{n}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$=n\cdot\frac{1}{n}-\Big[\log|nt-(n-1)|\Big]_a^{a+\frac{1}{n}}$$

$$=1-\log\left|\frac{(a-1)n+2}{(a-1)n+1}\right|$$

$$=1-\log\left|\frac{a-1+\frac{2}{n}}{a-1+\frac{1}{n}}\right|$$

したがって　$a=1$　のとき　$\lim_{n\to\infty}n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt=1-\log 2$

$a>1$　のとき　$\lim_{n\to\infty}n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt=1$