[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{2}$]

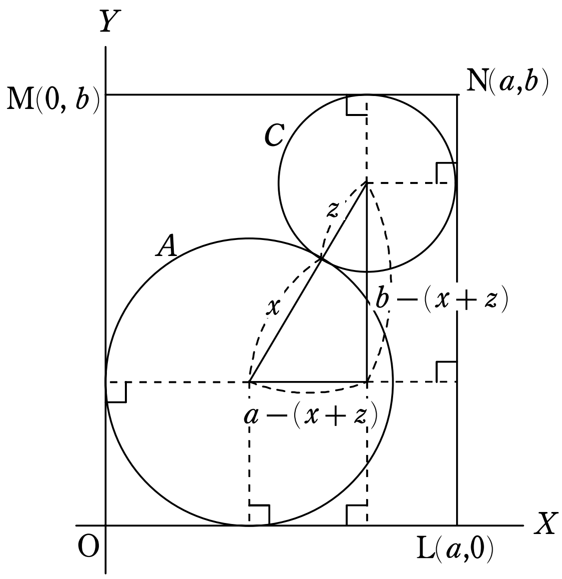
R を隣りあう 2 辺の長さ a, b が $2a > b > a$ を満たす長方形とし， A を次の性質(P)を持つ半径 x の円とする。

(P) R の内部にあって隣りあう 2 辺にだけ接する。

(1) 性質(P)を持つ円で円 A に外接するものが 4 つ存在するために，円 A の半径 x が満たすべき条件を a, b を使って表せ。

(2) x が(1)の条件を満たすとき，円 A に外接する 4 つの円のうち 2 番目に大きい円を B とする。x が変化するとき円 A と円 B の面積の和の最小値を求めよ。

(1) XY 座標平面に，図のように 4 点 O, L, M, N を定める。



このとき，図のように円 A, LN, MN に接する円が存在すれば，条件を満たす円は 4 つ存在する。

実際，例えば円 C が円 A と LN に接しながら移動すると，円 C の中心は点 (x, x) を焦点， $X = a + x$ を準線とする放物線上を動き，円 A, OL, LN に接する円は存在する。

同様に考えると，円 A, OM, MN に接する円も存在する。

また，円 A と OL, OM で囲まれた部分には，明らかに１つの円が存在する。これより 4 つの円が存在する。

円 C の半径を z とすると，三平方の定理から $(x+z)^2 = \{a-(x+z)\}^2 + \{b-(x+z)\}^2$ …①

ただし，円 A が存在する条件から $2x < a$ である。

①を z について整理し，平方完成すると $\{z-(a+b-x)\}^2 - 2ab = 0$ …②

②が $0 < z < \dfrac{a}{2}$ に実数解をもつ条件を求めればよい。

②の左辺を $f(z)$ とおくと 2 次関数 $y = f(z)$ の軸 $a+b-x > \dfrac{a}{2}$ に注意して

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f\left(\dfrac{a}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b-x)^2 - 2ab > 0 \\ \left(-\dfrac{a}{2} - b + x\right)^2 - 2ab < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b-x)^2 > 2ab \\ \left(-\dfrac{a}{2}-b+x\right)^2 < 2ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-x > \sqrt{2ab} \\ -\left(-\dfrac{a}{2}-b+x\right) < \sqrt{2ab} \end{cases}$$

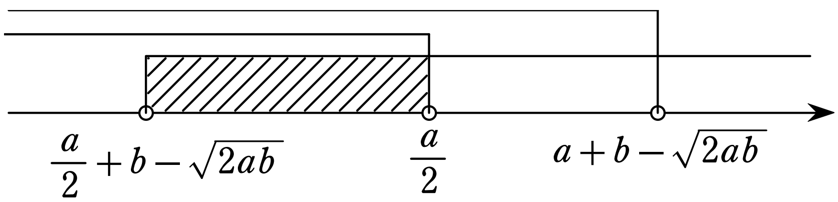
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < a+b-\sqrt{2ab} \\ x > \dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab} \end{cases} \quad \cdots ③$$

ここで，$a+b-\sqrt{2ab} = \dfrac{a}{2}+\left(\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)^2$ より $\dfrac{a}{2} < a+b-\sqrt{2ab}$

$a < b < 2a$ なので

$\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab} = \dfrac{a}{2}-\sqrt{b}\left(\sqrt{2a}-\sqrt{b}\right)$ より $\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab} < \dfrac{a}{2}$ であり，

③ かつ $2x < a$ $\left(\Leftrightarrow x < \dfrac{a}{2}\right)$ より



求める条件は $\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab} < x < \dfrac{a}{2}$ すなわち $\left(\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)^2 < x < \dfrac{a}{2}$

(2) (1)での考察と $b > a$ より 円 B はOM, MN に接する円である。

円 B の半径を y とすると，三平方の定理から

$(x+y)^2 = \{b-(x+y)\}^2+(x-y)^2 \Leftrightarrow \{y-(b+x)\}^2 = 4bx$

$y < b+x$ より $y = \left(\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^2$

よって $x^2+y^2 = x^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^4 \quad \cdots ④$

④の右辺において $u=\sqrt{x}$ としたものを $g(u)$ とすると

$$g(u)=u^4+\left(\sqrt{b}-u\right)^4$$

$$g'(u)=4\left(2u-\sqrt{b}\right)\left\{\sqrt{b}u+\left(\sqrt{b}-u\right)^2\right\}$$

(1)より $\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}<u<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ であり，$a<b<2a$ より

$\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ はこの区間に入り，$g'(u)$ は $u=\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ の前後で負から正に変化する。

よって，求める最小値は $\pi\cdot g\left(\dfrac{\sqrt{b}}{2}\right)=\dfrac{\pi b^2}{8}$