[東京工業大学 1998 年前期 $\boxed{1}$]

$a>0$ とし，$x,\ y$ が 4 つの不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 12,\ ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y \leqq 8$ を同時に満たしているとする。このとき $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ。

$$ax+\left(4-\frac{3}{2}a\right)y \leqq 8 \quad \cdots①$$

① $\Leftrightarrow$ $a(2x-3y)+8(y-2) \leqq 0 \quad \cdots②$

$\Leftrightarrow$ $x \leqq \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{a}\right)y+\dfrac{8}{a}$

②で等号が成り立つのは $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 8(y-2)=0 \end{cases}$ のときで，このとき $x=3,\ y=2$

よって①は a の値に関係なく，定点 $(3,\ 2)$ を必ず通る直線である。

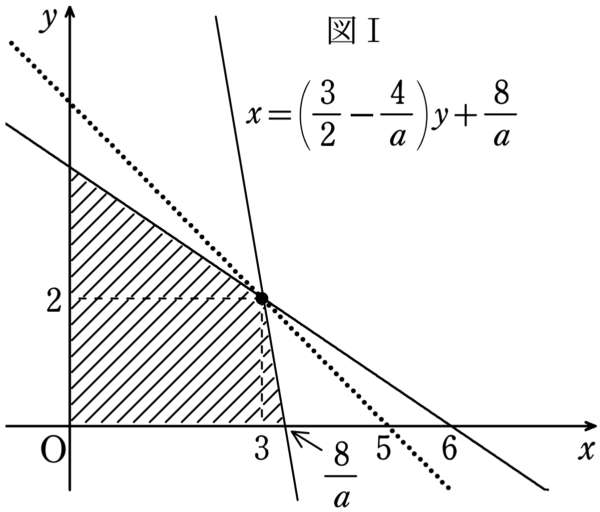
また，x 切片は $\dfrac{8}{a}$ であり，直線 $x+y=k$ がこの定点を通るとき x 切片は 5 である。

(i) $\dfrac{8}{a} \leqq 5 \Leftrightarrow a \geqq \dfrac{8}{5}$ のとき

4 つの不等式を同時に満たす $(x,\ y)$ の領域は図Ⅰのようになるから

$x+y$ は，$(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大である。

よって $f(a)=5$

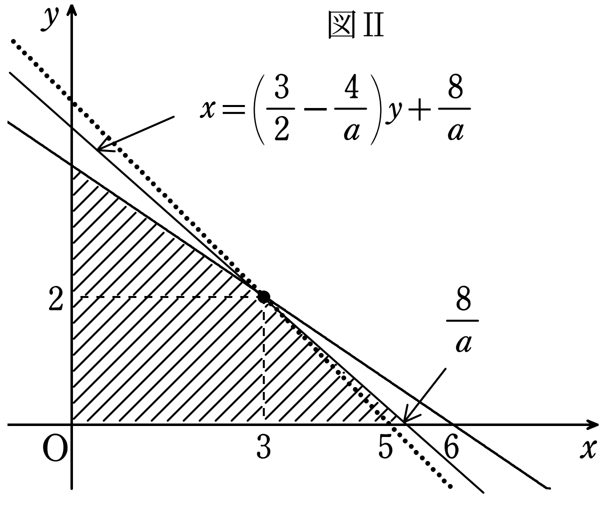


(ii) $5 \leqq \dfrac{8}{a} \leqq 6 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} \leqq a \leqq \dfrac{8}{5}$ のとき

(i)と同様に考えて図Ⅱから

$x+y$ は，$(x,\ y)=\left(\dfrac{8}{a},\ 0\right)$ で最大である。

よって $f(a)=\dfrac{8}{a}$

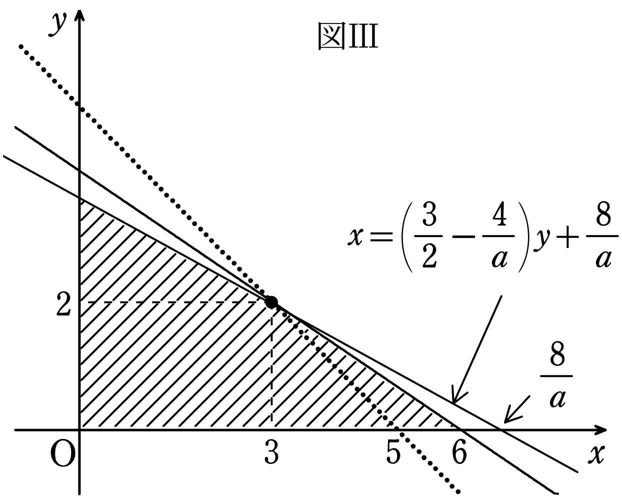


(iii) $\dfrac{8}{a} \geqq 6 \iff 0 < a \leqq \dfrac{4}{3}$ のとき

(ⅰ)と同様に考えて図IIIから

$x + y$ は，$(x, y) = (6, 0)$ で最大である。

よって　$f(a) = 6$



以上より

$$f(a) = \begin{cases} 5 & \left(a \geqq \dfrac{8}{5}\right) \\ \dfrac{8}{a} & \left(\dfrac{4}{3} \leqq a \leqq \dfrac{8}{5}\right) \\ 6 & \left(0 < a \leqq \dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$