[**東京工業大学 1997 年後期 $\boxed{2}$**]

四辺形ABCDと頂点Oからなる四角錐を考える。5点A, B, C, D, Oの中の2点は，ある辺の両端にあるとき，互いに隣接点であるという。

今，Oから出発し，その隣接点の中から1点を等確率で選んでその点をX_1とする。次にX_1の隣接点の中から1点を等確率で選びその点をX_2とする。この様にして順次$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \cdots\cdots, \mathrm{X}_n$を定めるとき，$\mathrm{X}_n$がOに一致する確率を求めよ。

$\mathrm{X}_n = \mathrm{O}$となる確率を$p_n$とおく。

$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{O}$となるのは$n$回目にO以外の点にいて，その後に確率$\dfrac{1}{3}$でOに移動する場合であるから

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$

$$= -\frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3}$$

が成り立つ。また，$p_1 = 0$である。

この漸化式を解くと $p_n = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} + \left(0 - \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となる。これが求める確率である。