[東京工業大学 1997 年後期 $\boxed{1}$]

放物線 $y=x^2$ を C_1 とし，C_1 上に両端をもつ長さ 1 の線分の中点の軌跡を C_2 とする。

C_1, C_2 および，2 直線 $x=\pm a\ \ (a>0)$ で囲まれる部分の面積を S_a とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S_a$ を求めよ。

$C_1 : y=x^2$ 上に，$\mathrm{PQ}=1$ となるように 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2),\ \mathrm{Q}(s,\ s^2)$ をとる。

また，P, Q の中点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{s+t}{2},\ Y=\frac{s^2+t^2}{2}\quad \cdots①$$

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(s-t)^2+(s^2-t^2)^2}=1$$ より

$$(s-t)^2+(s^2-t^2)^2=1 \iff (s-t)^2+(s-t)^2(s+t)^2=1$$

$$\iff (s-t)^2\left\{1+(s+t)^2\right\}=1$$

$$\iff (s^2+t^2-2st)\left\{1+(s+t)^2\right\}=1\quad \cdots②$$

となる。

①より $s+t=2X,\ s^2+t^2=2Y$ なので $s^2+t^2+2st=4X^2$ から

$st=2X^2-Y\quad \cdots③$

したがって，①，②，③より

$$\left(2Y-4X^2+2Y\right)\left(1+4X^2\right)=1 \iff Y=\frac{1}{4(1+4X^2)}+X^2$$

これが C_2 の方程式である。

$$\text{よって}\quad S_a=\int_{-a}^{a}\left\{\frac{1}{4(1+4x^2)}+x^2-x^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{1}{1+4x^2}dx$$

となる。

ここで，$2x=\tan\theta$ とおくと $2dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

$2a=\tan\alpha$ を満たす$\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$をとれば

$$S_a=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{2\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\alpha}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\alpha$$

$a\to\infty$ のとき $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S_a=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\alpha=\frac{\pi}{8}$ となる。