[東京工業大学 1997 年前期 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$a^2x^2+b^2y^2 \leqq 1$ を満たす (x, y) がすべて

$$a(x-1)+b(y-1) \leqq 0$$

を満たすような (a, b) の範囲を求め，図示せよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

「$a^2x^2+b^2y^2 \leqq 1$ …① を満たす (x, y) がすべて $a(x-1)+b(y-1) \leqq 0$ …② を満たす」

という条件は「①の満たす領域 A が，②の満たす領域 B に含まれる」…（＊）

ことと同値である。

(ｉ) $a \neq 0, b \neq 0$ のとき

①の境界線 $a^2x^2+b^2y^2=1$ …③ は，原点 O が中心の楕円であり， A はこの楕円の内部および周である。

②の境界線 $a(x-1)+b(y-1)=0$ …④ は，点 $(1, 1)$ を通る直線であり， B はこの直線によってつくられる半平面（境界線上の点を含む）である。

よって，（＊）であるための必要十分条件は

（ア）楕円③と直線④が共有点をもたないか接している

（イ）②の表す領域 B が $(0, 0)$ を含む

がともに成り立つことである。

④より $by=-ax+(a+b)$ を③に代入して

$$a^2x^2+\{-ax+(a+b)^2\}=1 \iff 2a^2x^2-2a(a+b)x+(a+b)^2-1=0$$

（ア）は，この x の 2 次方程式の判別式 $D \leqq 0$ と同値である。

よって $\dfrac{D}{4}=a^2(a+b)^2-2a^2\{(a+b)^2-1\} \leqq 0$

$a \neq 0$ より $a^2>0$ なので $(a+b)^2-2\{(a+b)^2-1\} \leqq 0 \iff (a+b)^2 \geqq 2$ を得る。

よって $a+b \leqq -\sqrt{2}$ または $\sqrt{2} \leqq a+b$ となるが，

（イ）より $a(-1)+b(-1) \leqq 0 \iff a+b \geqq 0$ なので $a+b \geqq \sqrt{2}$ となる。

したがって （ｉ）のときは， $a+b \geqq \sqrt{2}$ （$a \neq 0, b \neq 0$）

(ⅱ) $a \neq 0,\ b=0$ のとき

① $\Leftrightarrow$ $a^2x^2 \leqq 1$

$\Leftrightarrow$ $x^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}$

よって $-\dfrac{1}{|a|} \leqq x \leqq \dfrac{1}{|a|}$

② $\Leftrightarrow$ $a(x-1) \leqq 0$ より

$a>0$ のとき $x \leqq 1$

$a<0$ のとき $x \geqq 1$

したがって （ⅱ）のときは，$\dfrac{1}{|a|} \leqq 1$ かつ $a>0$ より $a \geqq 1$（$b=0$）

（ⅲ）$a=0,\ b \neq 0$ のとき

（ⅱ）と同様にして $b \geqq 1$（$a=0$）

（ⅳ）$a=0,\ b=0$ のとき

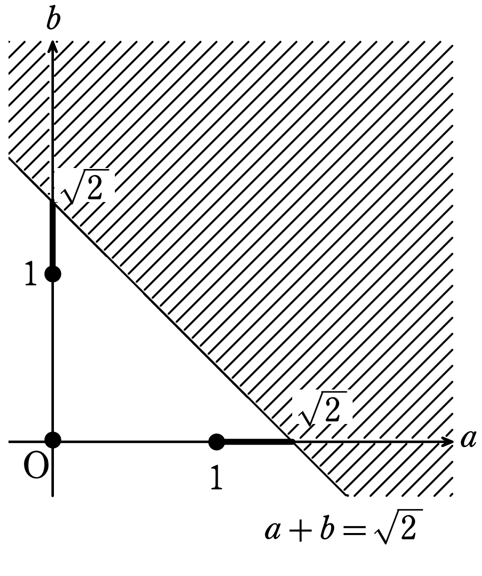
任意の $(x,\ y)$ に対して①の満たす領域 A は，②の満たす領域 B に含まれる。

よって $a=0,\ b=0$ は条件を満たす。

以上，（ⅰ）～（ⅳ）より求める範囲は

図の斜線部分，直線 $a+b=\sqrt{2}$，線分 $b=0,\ 1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$，線分 $a=0,\ 1 \leqq b \leqq \sqrt{2}$， O(0, 0)

である。



[東京工業大学 1997 年 前期 $\boxed{2}$]

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$ を求めよ。

(2) 任意の正数 a に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}$ は(1)と同じ極限をもつことを証明せよ。

(1) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=0+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1$$

$$=\log 2$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}<\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$ …① である。

また, $$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}=\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a+n+1}+\cdots+\frac{1}{a+n+n}$$

$$=\frac{1}{a+n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{a+n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{a+n}}\right\}$$

$$>\frac{1}{a+n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$= \frac{n}{a+n}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}$$

$$= \frac{n}{a+n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} \quad \cdots②$$

①，②と(1)の $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\log 2$ よりはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}=\log 2$

となるので，同じ極限値をもつ。

[東京工業大学 1997 年 前期 $\boxed{3}$]

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) n を自然数， r を正の有理数とする。このとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=r$$

を満たす自然数の x_k の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ の個数は有限であることを示せ。

---

(1) $x \leqq y$ とすると $\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ であり，

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$ より $x \leqq 4$

また，$\dfrac{1}{y}>0$ から $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{x}$ より $x>2$

したがって $x=3,\ 4$ のいずれかである。

$x=3$ のとき $y=6$，$x=4$ のとき $y=4$ であり，$x>y$ のときも考えて

求める $x,\ y$ の組は $(x,\ y)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$

(2) 数学的帰納法により示す。

(ⅰ) $n=1$ のとき

$\dfrac{1}{x_1}=r$ より これを満たす自然数 x_1 は高々 1 個。よって成り立つ。

(ⅱ) $m \geqq 1$ に対して $n=m$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}=r$ （r は正の有理数）を満たす自然数 x_k の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_m)$ の個数が

有限であると仮定する。

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k}=r'$ （r' は正の有理数） について考える。

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots\cdots \geqq x_{m+1}$ と仮定しても一般性を失わない。

このとき $r'=\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k} \leqq \sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_{m+1}}=\frac{m+1}{x_{m+1}}$ より $x_{m+1} \leqq \dfrac{m+1}{r'}$ となるから

これを満たす自然数は有限個である。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k}=r'$　より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}=r'-\frac{1}{x_{m+1}}$　となるが，$r'-\dfrac{1}{x_{m+1}}$　は正の有理数だから

これを満たす自然数 x_k の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_m)$ の個数は，仮定より有限個。

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k}=r'$　を満たす自然数の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_{m+1})$ の個数は有限個。

$n=m+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ)，(ⅱ)より数学的帰納法によって題意は示された。

[東京工業大学 1997 年前期 $\boxed{4}$]

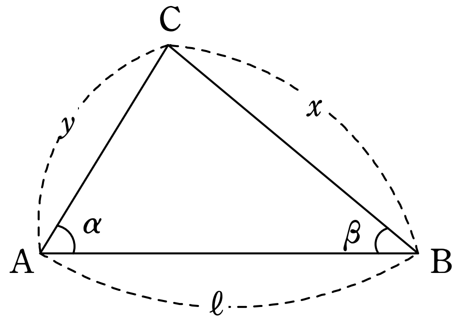
(1) 底辺の長さがℓ，2 つの底角がα, βの三角形の面積Sは，次式で与えられることを示せ。

$$S = \frac{\ell^2}{4} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

(2) 各辺の長さが$1, 2, \sqrt{3}$の三角形の各辺に 1 点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ。

(1) 図のような底辺の長さがℓ，2 つの底角がα, βの三角形を考える。

$\angle C = \pi - (\alpha + \beta)$ であり，正弦定理から $\dfrac{y}{\sin\beta} = \dfrac{\ell}{\sin\{\pi - (\alpha + \beta)\}}$ …①



三角形の面積をSとすると

$S = \dfrac{1}{2}\ell y \sin\alpha$ …②

①，②よりyを消去して

$$S = \frac{1}{2}\ell\sin\alpha \cdot \frac{\ell\sin\beta}{\sin\{\pi - (\alpha + \beta)\}}$$

$$= \frac{1}{2}\ell^2 \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\{\pi - (\alpha + \beta)\}}$$

ここで $\sin\{\pi - (\alpha + \beta)\} = \sin(\alpha + \beta)$,

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\}$ より

$S = \dfrac{1}{4}\ell^2 \cdot \dfrac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ を得る。

(2) 図のように各辺の長さが $1, 2, \sqrt{3}$ の△ABC の各辺に

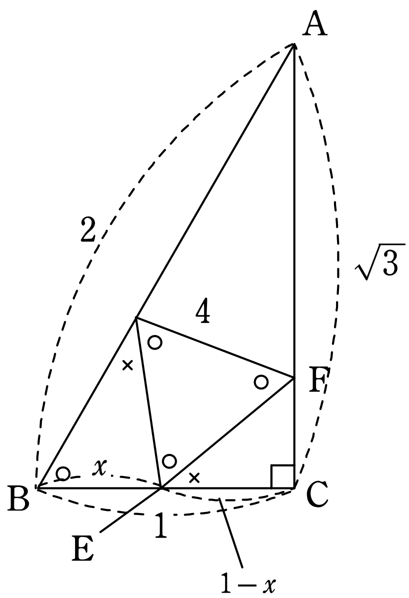
1 点ずつ頂点をもつ三角形を△DEF とする。

すると，$\angle\mathrm{DBE} = \angle\mathrm{DEF} = \dfrac{\pi}{3}$ より

$\angle\mathrm{BDE} = \angle\mathrm{FEC}$ である。

$\mathrm{BE} = x$ とおくと，$\mathrm{EC} = 1 - x$ であり，

△DEF の 1 辺の長さをℓとし，$\angle\mathrm{BDE} = \alpha$ とすると



正弦定理より

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{\ell}{\sin\frac{\pi}{3}},\ \frac{\mathrm{FC}}{\sin\alpha}=\frac{\ell}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

よって　$\mathrm{FC}=\ell\sin\alpha$

$$=\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x}{\ell}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

また，△FEC において三平方の定理より

$$\ell^2=(1-x)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$$

$$=\frac{7}{4}x^2-2x+1$$

△DEF の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{7}{4}x^2-2x+1\right)$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{16}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{16}\left(x-\frac{4}{7}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{28}$$

したがって，求める面積の最小値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{28}$