［ 東京工業大学 1997 年前期 $\boxed{4}$ ］

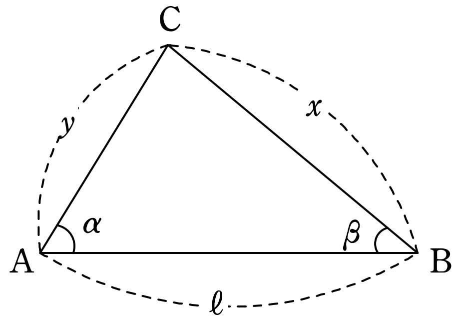
(1) 底辺の長さがℓ，2 つの底角がα, βの三角形の面積Sは，次式で与えられることを示せ。

$$S=\frac{\ell^2}{4}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

(2) 各辺の長さが$1, 2, \sqrt{3}$の三角形の各辺に 1 点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ。

(1) 図のような底辺の長さがℓ，2 つの底角がα, βの三角形を考える。

$\angle C=\pi-(\alpha+\beta)$ であり，正弦定理から $\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{\ell}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}$ …①



三角形の面積をSとすると

$S=\dfrac{1}{2}\ell y\sin\alpha$ …②

①，②よりyを消去して

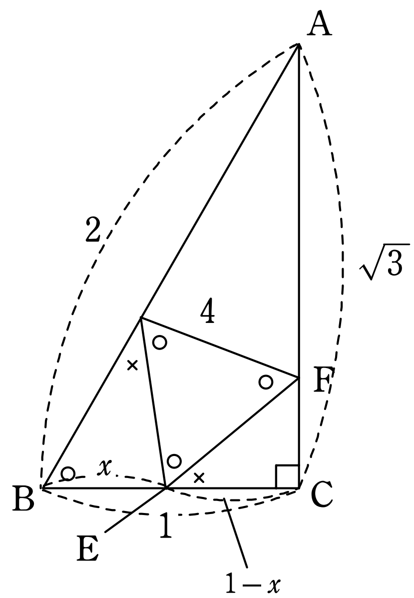
$$S=\frac{1}{2}\ell\sin\alpha\cdot\frac{\ell\sin\beta}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}$$

$$=\frac{1}{2}\ell^2\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}$$

ここで $\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}=\sin(\alpha+\beta)$,

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$ より

$$S=\frac{1}{4}\ell^2\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$ を得る。



(2) 図のように各辺の長さが $1, 2, \sqrt{3}$ の△ABC の各辺に

1 点ずつ頂点をもつ三角形を△DEF とする。

すると，$\angle\mathrm{DBE}=\angle\mathrm{DEF}=\dfrac{\pi}{3}$ より

$\angle\mathrm{BDE}=\angle\mathrm{FEC}$ である。

$\mathrm{BE}=x$ とおくと，$\mathrm{EC}=1-x$ であり，

△DEF の 1 辺の長さをℓとし，$\angle\mathrm{BDE}=\alpha$ とすると

正弦定理より

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{\ell}{\sin\frac{\pi}{3}},\ \frac{\mathrm{FC}}{\sin\alpha}=\frac{\ell}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

よって　$\mathrm{FC}=\ell\sin\alpha$

$$=\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x}{\ell}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

また，△FECにおいて三平方の定理より

$$\ell^2=(1-x)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$$

$$=\frac{7}{4}x^2-2x+1$$

△DEFの面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{7}{4}x^2-2x+1\right)$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{16}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{16}\left(x-\frac{4}{7}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{28}$$

したがって，求める面積の最小値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{28}$