[東京工業大学 1997 年 前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) n を自然数， r を正の有理数とする。このとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=r$$

を満たす自然数の x_k の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ の個数は有限であることを示せ。

☆ ☆

(1) $x \leqq y$ とすると $\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ であり，

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$ より $x \leqq 4$

また， $\dfrac{1}{y}>0$ から $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{x}$ より $x>2$

したがって $x=3,\ 4$ のいずれかである。

$x=3$ のとき $y=6$， $x=4$ のとき $y=4$ であり， $x>y$ のときも考えて

求める $x,\ y$ の組は $(x,\ y)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$

(2) 数学的帰納法により示す。

(ｉ) $n=1$ のとき

$\dfrac{1}{x_1}=r$ より これを満たす自然数 x_1 は高々1 個。よって成り立つ。

(ⅱ) $m \geqq 1$ に対して $n=m$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}=r$ （r は正の有理数）を満たす自然数 x_k の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_m)$ の個数が

有限であると仮定する。

ここで， $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k}=r'$ （r' は正の有理数） について考える。

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots\cdots \geqq x_{m+1}$ と仮定しても一般性を失わない。

このとき $r'=\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k} \leqq \sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_{m+1}}=\frac{m+1}{x_{m+1}}$ より $x_{m+1} \leqq \dfrac{m+1}{r'}$ となるから

これを満たす自然数は有限個である。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k}=r'$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}=r'-\frac{1}{x_{m+1}}$ となるが，$r'-\dfrac{1}{x_{m+1}}$ は正の有理数だから

これを満たす自然数 x_k の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_m)$ の個数は，仮定より有限個。

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{x_k}=r'$ を満たす自然数の組 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_{m+1})$ の個数は有限個。

$n=m+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ)，(ⅱ)より数学的帰納法によって題意は示された。