[東京工業大学 1997 年 前期 $\boxed{2}$]

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$ を求めよ。

(2) 任意の正数 a に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}$ は(1)と同じ極限をもつことを証明せよ。

---

(1) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=0+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1$$

$$=\log 2$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}<\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$ …① である。

また, $$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}=\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a+n+1}+\cdots+\frac{1}{a+n+n}$$

$$=\frac{1}{a+n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{a+n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{a+n}}\right\}$$

$$>\frac{1}{a+n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$= \frac{n}{a+n}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}$$

$$= \frac{n}{a+n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} \quad \cdots②$$

①，②と(1)の $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\log 2$ よりはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}=\log 2$

となるので，同じ極限値をもつ。