[東京工業大学 1997 年前期 $\boxed{1}$]

☆――☆

$a^2x^2+b^2y^2\leqq 1$ を満たす $(x,\ y)$ がすべて

$$a(x-1)+b(y-1)\leqq 0$$

を満たすような $(a,\ b)$ の範囲を求め，図示せよ。

☆――☆

「$a^2x^2+b^2y^2\leqq 1$ …① を満たす $(x,\ y)$ がすべて $a(x-1)+b(y-1)\leqq 0$ …② を満たす」

という条件は「①の満たす領域 A が，②の満たす領域 B に含まれる」…（＊）

ことと同値である。

(ｉ) $a\neq 0,\ b\neq 0$ のとき

①の境界線 $a^2x^2+b^2y^2=1$ …③ は，原点 O が中心の楕円であり， A はこの楕円の内部

および周である。

②の境界線 $a(x-1)+b(y-1)=0$ …④ は，点 $(1,\ 1)$ を通る直線であり， B はこの直線に

よってつくられる半平面（境界線上の点を含む）である。

よって，（＊）であるための必要十分条件は

（ア）楕円③と直線④が共有点をもたないか接している

（イ）②の表す領域 B が $(0,\ 0)$ を含む

がともに成り立つことである。

④より $by=-ax+(a+b)$ を③に代入して

$$a^2x^2+\{-ax+(a+b)^2\}=1 \Leftrightarrow 2a^2x^2-2a(a+b)x+(a+b)^2-1=0$$

（ア）は，この x の 2 次方程式の判別式 $D\leqq 0$ と同値である。

よって $\dfrac{D}{4}=a^2(a+b)^2-2a^2\{(a+b)^2-1\}\leqq 0$

$a\neq 0$ より $a^2>0$ なので $(a+b)^2-2\{(a+b)^2-1\}\leqq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2\geqq 2$ を得る。

よって $a+b\leqq -\sqrt{2}$ または $\sqrt{2}\leqq a+b$ となるが，

（イ）より $a(-1)+b(-1)\leqq 0 \Leftrightarrow a+b\geqq 0$ なので $a+b\geqq\sqrt{2}$ となる。

したがって （ｉ）のときは， $a+b\geqq\sqrt{2}$ （$a\neq 0,\ b\neq 0$）

(ⅱ) $a \neq 0,\ b = 0$ のとき

① $\Leftrightarrow$ $a^2x^2 \leqq 1$

$\Leftrightarrow$ $x^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}$

よって $-\dfrac{1}{|a|} \leqq x \leqq \dfrac{1}{|a|}$

② $\Leftrightarrow$ $a(x-1) \leqq 0$ より

$a > 0$ のとき $x \leqq 1$

$a < 0$ のとき $x \geqq 1$

したがって （ⅱ）のときは，$\dfrac{1}{|a|} \leqq 1$ かつ $a > 0$ より $a \geqq 1$（$b = 0$）

（ⅲ）$a = 0,\ b \neq 0$ のとき

（ⅱ）と同様にして $b \geqq 1$（$a = 0$）

（ⅳ）$a = 0,\ b = 0$ のとき

任意の $(x,\ y)$ に対して①の満たす領域 A は，②の満たす領域 B に含まれる。

よって $a = 0,\ b = 0$ は条件を満たす。

以上，（ⅰ）～（ⅳ）より求める範囲は

図の斜線部分，直線 $a + b = \sqrt{2}$，線分 $b = 0,\ 1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$，線分 $a = 0,\ 1 \leqq b \leqq \sqrt{2}$，O(0, 0)

である。