［ 東京工業大学 1996 年後期 $\boxed{1}$ ］

円$C: x^2+y^2=1$ 上の 2 点 P(1, 0) と Q$(\cos\theta, \sin\theta)$ を通り円Cと直交する円をC_θとする。ただし，円Cと円C_θが直交するとは交点におけるそれぞれの接線が直交することをいう。このとき次の問いに答えよ。

(1) $0<\theta<\pi$ のときCの内部とC_θの内部の共通部分の面積S_θを求めよ。

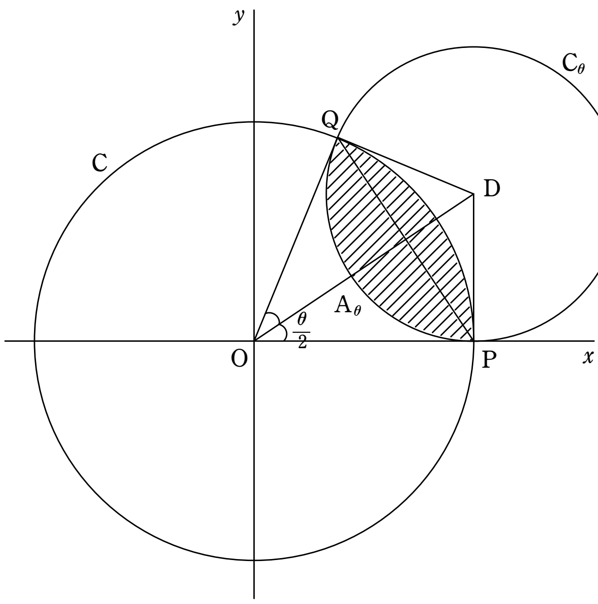
(2) Cの内部にあるC_θの円弧PQの中点をA_θとする。θが$0<\theta<\pi$ の範囲を動くとき，A_θの軌跡の方程式を求めよ。

(3) A_θの軌跡とx軸で囲まれる部分をx軸のまわりに回転してできる立体の体積Vを求めよ。

(1) C_θの中心をDとすると

$\angle\mathrm{PDQ}=\pi-\theta$，$\mathrm{DP}=\mathrm{DQ}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

求める面積は，PQを弦とするCの弓形とC_θの弓形の面積の和である。



$$S_\theta=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot(\pi-\theta)-\frac{1}{2}\cdot\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)+\frac{1}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\left(\pi-\theta-\sin\theta\right)$$

(2) $\mathrm{OD}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$，$\mathrm{DA}_\theta=\mathrm{DP}=\tan\dfrac{\theta}{2}$ により

$$\mathrm{OA}_\theta=\mathrm{OD}-\mathrm{DA}_\theta=\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

したがって，$\mathrm{A}_\theta(x, y)$ とおくと

$x=\mathrm{OA}_\theta\cos\dfrac{\theta}{2}=1-\sin\dfrac{\theta}{2}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}=1-x$ …①

$y=\mathrm{OA}_\theta\sin\dfrac{\theta}{2}=\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}$ と①より $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{y}{x}$ …②

$0<\theta<\pi$ より $x>0,\ y>0$ である。

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}}=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}}=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}$$ であるから ①, ②を代入して

$$1-x=\frac{\dfrac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}$$ から $(1-x)^2=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

y について解くと $(1-x)^2x^2+(1-x)^2y^2=y^2$

$$(x^2-2x)y^2=-(1-x)^2x^2$$

$$y^2=\frac{(1-x)^2x}{2-x}$$

$$y=(1-x)\sqrt{\frac{x}{2-x}}\quad(0<x<1)$$

(3) $V=\displaystyle\int_0^1\pi y^2dx=\pi\int_0^1\frac{x^3-2x^2+x}{2-x}dx=\pi\int_0^1\left(-x^2-1-\frac{2}{x-2}\right)dx=\pi\left[-\frac{x^3}{3}-x-2\log|x-2|\right]_0^1$

$=\left(2\log 2-\dfrac{4}{3}\right)\pi$

【注】 A_θ の軌跡は右図のようになる。